abcd-formule?

Mieke Janssen

Master Thesis Project

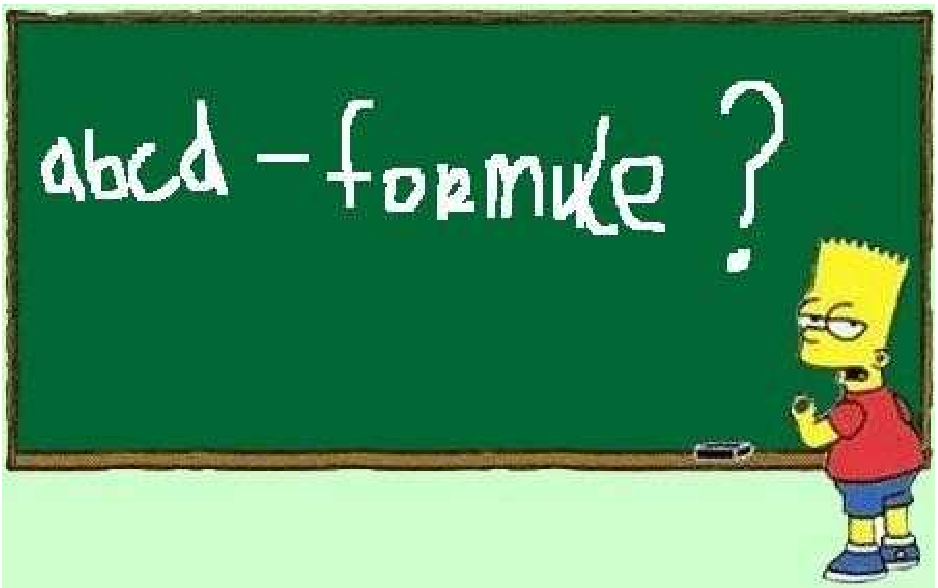
Begeleider: Prof. Dr. F.J. Keune

Radboud Universiteit Nijmegen

Voorwoord

Je kent de *abc*-formule en je weet dat je deze kunt gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Maar heb je er wel eens over na gedacht hoe je bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 6x + 8 = 0$ kunt oplossen? En dan bedoel ik algebraïsch oplossen, dus zonder gebruik te maken van je grafische rekenmachine. Is er misschien voor dit soort vergelijkingen een "*abcd*-formule"? En zo ja, hoe ziet deze formule er dan uit?

In deze module proberen we een antwoord te vinden op deze vragen. Maar voordat we ons met deze vragen bezig houden, kijken we iets beter naar de *abc*-formule. Want hoe komen we eigenlijk aan de *abc*-formule?



Leeswijzer

Deze module is ingedeeld in twee hoofdstukken. Deze hoofstukken zijn onderverdeeld in verschillende paragrafen. Wiskunde leer je niet alleen door er over te lezen, het is erg belangrijk om ook zelf met opgaven aan de slag te gaan. Daarom vind je tussen de tekst in de omlijnde vakken opgaven.
In de laatste twee paragrafen van het tweede hoofdstuk moet je veel rekenen met letters, waardoor deze er misschien erg moeilijk uit zien. Maar deze paragrafen zijn juist een goede oefening in het rekenen met letters.
Je leert in deze module iets over geschiedenis die bij dit onderwerp hoort. De teksten die puur over de geschiedenis gaan zijn *cursief* en kleiner gedrukt zodat je ze gemakkelijk kunt herkennen.

Inhoudsopgave

1 Kwadratische vergelijkingen

In dit hoofdstuk bekijken we **kwadratische vergelijkingen**. Deze worden ook wel vierkantsvergelijkingen of tweedegraads vergelijkingen genoemd.
Kwadratische vergelijkingen zijn vergelijkingen waarin de onbekende x tot de tweede macht voorkomt en waarin geen hogere machten van x voorkomen. Een voorbeeld van zo'n vergelijking is $x^2+4x-2=0$. En $x^5+2x^2+x=7=0$ is dus geen kwadratische vergelijking
Sommige van deze vergelijkingen lossen we op door te ontbinden in factoren. Bijvoorbeeld de vergelijking $x^2-x-6=0$, want $x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0$. Dus de oplossingen van de vergelijking zijn $x=-2$ en $x=3$.
Alle kwadratische vergelijkingen kun je oplossen met de *abc*-formule. Maar hoe komen we eigenlijk aan de *abc*-formule? Dit hoofdstuk geeft daar een antwoord op.

Figuur 1: Parthenon, de tempel van de griekse god Athene.

1.1 Kwadraatafsplitsen

In deze paragraaf wordt een recept gegeven waarmee je kwadratische vergelijkingen kunt oplossen. Dit recept wordt **kwadraatafsplitsen** genoemd. In de volgende paragraaf gebruiken we dit recept om de *abc*-formule af te leiden.

We leggen kwadraatafsplitsen uit aan de hand van een voorbeeld.
Bekijk de vergelijking:

$$x^2 + 10x - 39 = 0. \tag{1}$$

We willen $x^2 + 10x - 39$ schrijven als een kwadraat plus een getal, want dan is deze vergelijking handig op te lossen. Hiervoor gebruik je

$$(x + d)^2 = (x + d)(x + d) = x^2 + 2dx + d^2. \tag{2}$$

Bekijk nu goed vergelijking (1) en uitdrukking (2). Dan zie je dat deze veel op elkaar lijken als $2d = 10$ dus $d = \frac{10}{2} = 5$.
Dus neem $d = 5$, dan zien we:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

We gebruiken dit om de vergelijking $x^2 + 10x - 39 = 0$ te herschrijven.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 39 &= x^2 + 10x + 25 - 25 - 39 \\ &= x^2 + 10x + 25 - 64 \\ &= (x + 5)^2 - 64 \end{aligned}$$

Je hebt dan de vergelijking

$$(x + 5)^2 - 64 = 0.$$

Tel aan beide kanten van het =-teken 64 er bij op. Dan krijg je

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Nu trekken we de wortel

$$x + 5 = \sqrt{64} \qquad \text{of} \qquad x + 5 = -\sqrt{64},$$

dus

$$x + 5 = 8 \qquad \text{of} \qquad x + 5 = -8.$$

Dit geeft

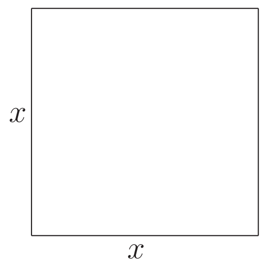
$$x = 3 \qquad \text{of} \qquad x = -13.$$

Dus de vergelijking $x^2 + 10x - 39 = 0$ heeft als oplossingen $x = 3$ en $x = -13$.

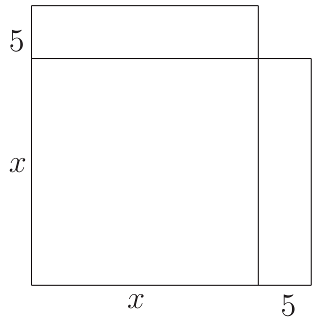
Het idee van kwadraatafsplitsen werd voor het eerst gebruikt door *Al-Khwarizmi.*
Al-Khwarizmi werd omstreeks 780 geboren in Khiwa (Uzbekistan, Centraal Azië). Hij schreef verschillende boeken over wiskunde. Een boek dat grote invloed heeft gehad, is het boek dat gaat over de leer van vergelijkingen. Hierin worden eerste- en tweedegraads vergelijkingen besproken. *Al-Khwarizmi* beschrijft alle vergelijkingen met woorden. Zo noteerde hij de vergelijking $x^2+10x-39=0$ als: één vierkant plus tien wortels is gelijk aan negenendertig. Waarbij met wortel onze onbekende x wordt bedoeld. De methodes die *Al-Khwarizmi* beschrijft, worden ondersteund door een meetkundige manier van oplossen. Deze zullen we nu beschrijven.

Figuur 2: Al-Khwarizmi

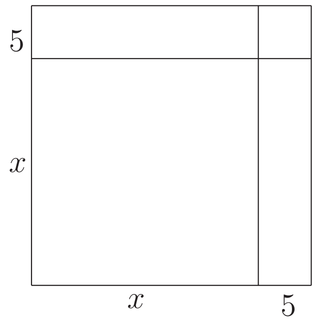
We nemen weer $x^2+10x=39$ als voorbeeld.
Al-Khwarizmi zag x^2 als een vierkant met zijde x en dus met een oppervlakte van x^2.



$10x$ zag hij als een rechthoek met een zijde x en een zijde 10 (rechthoek met oppervlakte $10x$). En dit is hetzelfde als 2 rechthoeken met zijde x en zijde 5. Deze twee rechthoeken hebben samen natuurlijk ook oppervlakte $10x$.
Dus $x^2+10x=x^2+5x+5x$ geeft de volgende figuur.



Wanneer je dit plaatje bekijkt, bedenk dan dat we niet weten hoe groot 5 moet zijn ten opzichte van x, omdat x nog onbekend is. De vergelijking $x^2 + 10x = 39$ vertelt ons dat de oppervlakte van deze figuur gelijk is aan 39. *Al-Khwarizmi* maakt van deze figuur een compleet vierkant door een vierkantje van 5 bij 5 toe te voegen.



De oppervlakte van dit vierkant is dus $39 + 25 = 64$. De lengte van de zijde van dit vierkant is $\sqrt{64} = 8$
De waarde van x is dus gelijk aan $8 - 5 = 3$.

Opgave 1: Los de vergelijking $x^2 + 4x = 20$ meetkundig op zoals *Al-Khwarizmi* dat deed. Geef duidelijke uitleg bij de plaatjes.

Opgave 2: Los de volgende vergelijkingen op met behulp van kwadraatafsplitsen.

a. $x^2 + 6x - 40 = 0$
b. $x^2 + 14x = 32$
c. $x^2 + 20x + 66 = 2 + 4x$
d. $x^4 + 17x^2 = x^2 - 64$
e. $6x^2 + 143x + 167 = 4x^2 + 23x + 49$
f. $\frac{5x^2+39x+292}{2x^2-3x+37} = 1$
g. $2x^2 + 6x + 5 = x^2 - 2x - 79$

Opgave 3: Los de volgende vergelijkingen op met behulp van kwadraatafsplitsen.

a. $2x^2 + 8 = 16x$
b. $-20x^2 - 45 - 3x = -63x - 2x^2 + 5$
c. $x^4 - 4x^2 = 21$
d. $\frac{x^2-6x+11}{4x-1} = 2$
e. $6x^6 - 12x^3 + 69 = 3x^6 - 18x^3 - 21$

Opgave 4: Los de volgende vergelijkingen op met behulp van kwadraatafsplitsen.

a. $\frac{2}{3}x^4 + 4\frac{2}{3}x^2 + 2\frac{1}{6} = 0$
b. $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2} = 0$
c. $\frac{4x^2-7}{2x-1} = 3$
d. $x^2 + \sqrt{7}x - \frac{1}{4} = 0$
e. $3x^2 - 1 = \frac{1}{2}(-x + 14)$

De vergelijking $x^2 = 6x + 16$ kun je niet oplossen op de meetkundige manier die we hebben bekeken op pagina 8. (Waarom niet?) Om dit soort vergelijkingen meetkundig op te lossen zijn er andere methodes. Hierover gaat de volgende opgave.

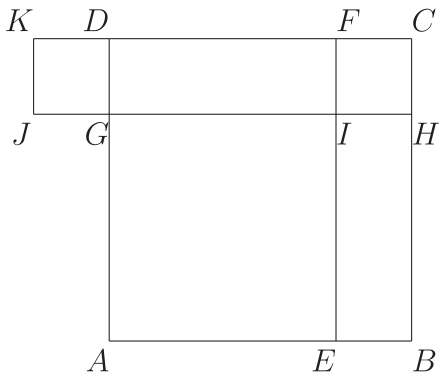
Opgave 5: Hoe los je de vergelijking $x^2 = 6x+16$ meetkundig op?

a. Teken een vierkant $ABCD$ met zijde x (en dus met oppervlakte x^2).

b. Teken in dit vierkant twee rechthoeken met oppervlakte $3x$ zoals in de figuur hier beneden.

c. De twee rechthoeken met oppervlakte $3x$ overlappen elkaar. Wat is de oppervlakte van dit stukje overlap?

d. Teken linksboven aan het vierkant $ABCD$ een vierkantje $JGDK$ met dezelfde oppervakte als het stukje overlap van de twee rechthoeken.



e. Wat is de oppervlakte van deze figuur?

f. Wat is de oppervlakte van rechthoek $JIFK$ + rechthoek $EBCF$?

g. Wat is de oppervlakte van vierkant $AEIG$?

h. Bereken x.

Opgave 6: Een verhouding die de Grieken graag gebruikten in hun ontwerpen van gebouwen is de **gulden snede**. Hierbij wordt een lijnstuk van lengte 1 in twee delen verdeeld.

Eén deel met lengte x en een deel met lengte $1-x$, zodat de verhouding van x tot $1-x$ het zelfde is als die van het hele lijnstuk tot x. Dus

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}.$$

a. Laat zien dat je deze vergelijking kunt omschrijven tot $x^2+x-1=0$.
b. Los deze vergelijking algebraïsch op.
We weten dat de oplossing een positief getal moet zijn. Dit getal wordt de **gulden snede** genoemd.

*De **gulden snede** wordt gezien al een "mooie" verhouding. Men ziet hem bijvoorbeeld als de ideale verhouding voor de zijde van een rechthoek.*
*In de architectuur wordt de **gulden snede** ook veel gebruikt. Men zet bijvoorbeeld een deur in een muur op de gulden snede. Ook is deze verhouding terug te vinden bij de bouw van piramides en in het Parthenon, de tempel van de griekse god Athene (zie pagina 7).*
*Omdat de **gulden snede** mooi is om naar te kijken wordt deze ook vaak gebruikt in de kunst. Als een schilder bijvoorbeeld een schilderij maakt, legt hij de horizon niet in het midden van zijn doek maar op gulden snede hoogte.*
*Ook in de natuur kom je de **gulden snede** op veel plaatsen tegen. Bijvoorbeeld bij de ordening van de pitten in een zonnenbloemen en de schubben van een dennenappel.*

1.2 De *abc*-formule

In de vorige paragraaf heb je geleerd hoe je kwadratische vergelijkingen kunt oplossen met behulp van kwadraatafsplitsen. In deze paragraaf wordt kwadraatafsplitsen gebruikt om de *abc*-formule af te leiden.

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

waarbij a niet gelijk is aan 0, want als $a = 0$, dan is het geen kwadratische vergelijking meer.
We passen het recept uit de vorige paragraaf nu toe op deze algemene vorm. We gaan deze vergelijking dus oplossen met behulp van kwadraatafsplitsen. Om kwadraatafsplitsen te kunnen toepassen, moet je er eerst voor zorgen dat de coëfficiënt van x^2 gelijk is aan 1. Deel hiertoe beide kanten van het =-teken door a (dit kan, want a is niet 0). Dan krijgen we

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

We spreken af

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{en} \quad q = \frac{c}{a}.$$

De vergelijking die opgelost moet worden is dus

$$x^2 + px + q = 0.$$

Opgave 7: We gaan de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ oplossen.
a. Bereken $(x + \frac{p}{2})^2$.
b. Los $x^2 + px + q = 0$ op met behulp van kwadraatafsplitsen.
c. Laat zien dat $\frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Je hebt nu gezien dat de oplossingen van de vergelijking

$$x^2 + px + q = 0.$$

gelijk zijn aan

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Opgave 8: We weten nu wat de oplossing is van de vergelijking $x^2 + px + q = 0$. Op dit moment bedenken we dat $p = \frac{b}{a}$ en $q = \frac{c}{a}$.
a. Wat is de oplossing van de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$?
b. Laat zien dat $\frac{-\frac{b}{a}+\sqrt{(\frac{b}{a})^2-4(\frac{c}{a})}}{2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

De oplossingen van de algemene kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zien er als volgt uit

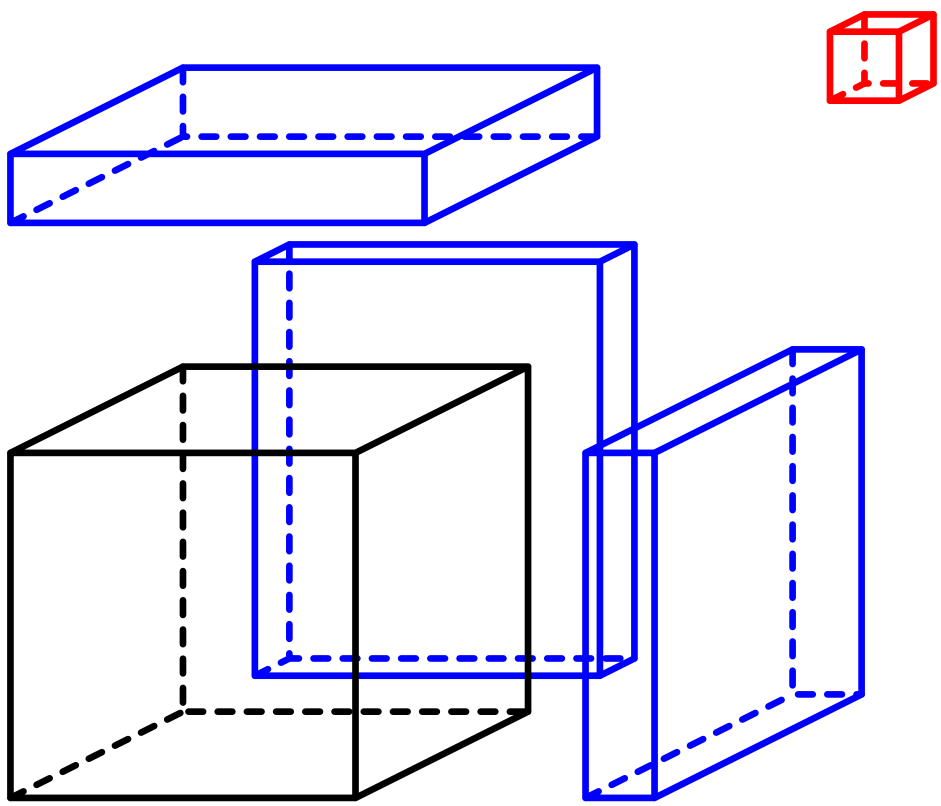
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dit is wat je kent als de *abc*-formule. We hebben gezien hoe je de *abc*-formule kunt afleiden voor de algemene vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$:
Deel eerst beide kanten van het =-teken door a.
Los vervolgens de vergelijking op met kwadraatafsplitsen.

Opgave 9: Schrijf de afleiding van de *abc*-formule kort in je eigen woorden op.

2 Derdegraads vergelijkingen

Dit hoofdstuk gaat over derdegraads vergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen waarin de onbekende x tot de derde macht voorkomt en waarin geen hogere machten van x voorkomen. Een voorbeeld van zo'n vergelijking is $x^3 + 6x^2 - 4x + 17 = 0$. In dit hoofdstuk leer je hoe je derdegraads vergelijkingen kunt oplossen. Verder geven we antwoord op de vraag of er voor derdegraads vergelijkingen ook een soort van "*abc*-formule" is?



2.1 $x^3 + px + q = 0$

In deze paragraaf leer je hoe je derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunt oplossen. We bekijken eerst een meetkundige en later een algebraïsche manier. Beide manieren bespeken we aan de hand van een voorbeeld.

In 1545 verscheen een uitgebreid boek over Algebra geschreven door *Girolamo Cardano*. In dit boek "Ars Magna" beschrijft *Cardano* onder andere een methode om derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ op te lossen. *Cardano* heeft deze oplosmethode echter niet bedacht. Dat waren *Scipione del Ferro* en *Nicolo Tartaglia*. *Cardano* was wel de eerste die deze methode publiceerde, tot grote ergernis van *Tartaglia*.

Figuur 3: Cardano

Figuur 4: Tartaglia

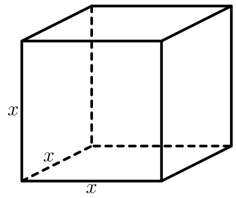
Girolamo Cardano werd op 24 september 1501 geboren in Pivia, Italië. Hij leerde veel wiskunde van zijn vader. Hij werd arts, maar bleef zich veel bezig houden met wiskunde. Hij stierf op 21 september 1576.

Tartaglia werd in 1494 geboren in het Italiaanse Brecia. Hij leerde zichzelf veel wiskunde. Later werkte hij als rekenmeester en wiskundeleraar. Tartaglia is niet zijn echte naam, dat was Niccolo Fontana. Hij werd echter door iedereen Tartaglia (Stotteraar) genoemd. Niccolo Fontana overleed in 1557 in Venetië.

Net zoals *Al-Khwarizmi* beschreef *Cardano* vergelijkingen niet met symbolen, maar met woorden. De vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ zou hij beschrijven als: één kubus plus zes wortels is gelijk aan twintig.
De methode van *Tartaglia*, die *Cardano* in zijn boek "Ars Magna" beschrijft, wordt net als bij *Al-Khwarizmi* ondersteund door een meetkundige manier van oplossen. Met deze methode lossen we de volgende vergelijking op:

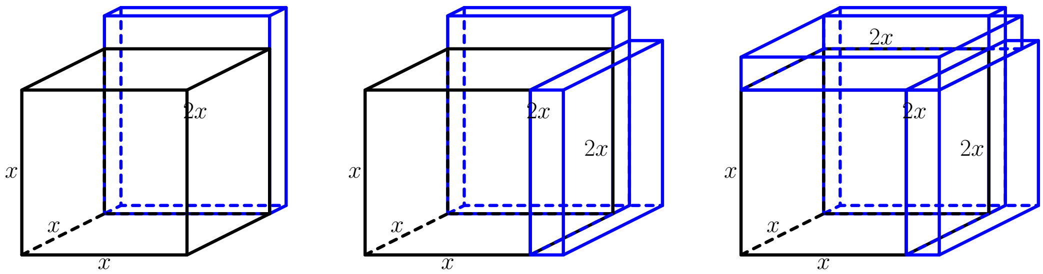
$$x^3 + 6x - 20 = 0.$$

Tartaglia zag bij de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$,
x^3 als een kubus met ribbe x en dus een inhoud van x^3.



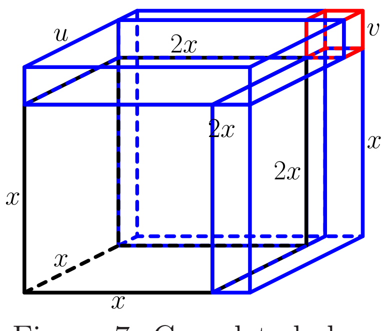
Figuur 5: Kubus met inhoud x^3

$6x$ stelde *Tartaglia* zich voor als 3 dezelfde balken met elk een inhoud van $2x$ en één zijde met lengte x. De andere twee zijden van deze balken liggen nog niet vast. Wel wist *Tartaglia*, omdat hij met behulp van deze balken weer een kubus wilde maken, dat de langste zijde van de kubus de som van de andere twee zijden is.
Deze balken plaatste hij op de volgende manier aan de kubus.



Figuur 6: Kubus met balken

De vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ vertelt ons dat de inhoud van deze laatste figuur gelijk is aan 20.
Tartaglia maakt van deze figuur een complete kubus door een kleine kubus toe te voegen.



Figuur 7: Complete kubus

De ribbe van deze kleine kubus noemen we v. De inhoud hiervan is dus v^3.
De ribbe van de grote kubus, die we nu hebben gekregen, noemen we u. De

inhoud van de grote kubus is dan u^3. Je ziet dat x gelijk is aan $u - v$. We gaan nu u en v bepalen zodat we $x = u - v$ kunnen berekenen.

Als je nog eens goed naar de figuur kijkt, dan zie je dat

$$\text{grote kubus - kleine kubus} = u^3 - v^3 = x^3 + 6x = 20.$$

De inhoud van een van de balken is

$$x \cdot u \cdot v = 2x.$$

Opgave 1: Laat zien dat uit $x \cdot u \cdot v = 2x$ volgt dat $u^3 \cdot v^3 = 8$.

We weten dus dat $u^3 v^3 = 8$ en $u^3 - v^3 = 20$.
Je kunt nu u^3 uitdrukken in v^3 door beide kanten van de vergelijking $u^3 v^3 = 8$ te delen door v^3. Je krijgt $u^3 = \frac{8}{v^3}$. Invullen in de vergelijking $u^3 - v^3 = 20$ levert

$$\frac{8}{v^3} - v^3 = 20.$$

Vermenigvuldig beide kanten van het =-teken met v^3. En je krijgt:

$$8 - v^6 = 20v^3$$

en dus

$$v^6 + 20v^3 - 8 = 0.$$

Opgave 2: We gaan met behulp van het bovenstaande x exact berekenen.
a. Bereken algebraïsch v^3 en u^3.
b. Bereken $(1 + \sqrt{3})^3$ en $(-1 + \sqrt{3})^3$ algebraïsch.
c. Bereken v en u exact.
d. Bereken x exact.

Je hebt gevonden dat de oplossing van de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ is $x = 2$.

Hierboven heb je gezien hoe we derdegraads vergelijkingen meetkundig op kunnen lossen. Er is ook een algemeen recept om algebraïsch een oplossing te vinden voor vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$. Dit leggen we uit aan de hand van hetzelfde voorbeeld. We lossen nogmaals de volgende vergelijking op

$$x^3 + 6x - 20 = 0.$$

Dit maal algebraïsch en met behulp van een algemeen recept.

Opgave 3: Stel $x = u - v$. Laat zien dat

$$x^3 + 6x - 20 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6(u - v) - 20.$$

In opgave 3 heb je gezien dat de vergelijking $x^3 + 6x - 20$ geschreven kan worden als $u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6(u - v) - 20 = 0$, als $x = u - v$.
We zoeken u en v die voldoen aan de vergelijking

$$u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6(u - v) - 20 = 0.$$

Want als we u en v weten, kunnen we $x = u - v$ berekenen.

Opgave 4: Laat zien dat

$$u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6(u - v) - 20 = 0$$

als $3uv = 6$ en $u^3 - v^3 = 20$.

We zoeken dus u en v die voldoen aan

$$3uv = 6 \qquad \text{en} \qquad u^3 - v^3 = 20.$$

Opgave 5: Laat zien: als $3uv = 6$, dan is $u^3v^3 = 8$.

We weten dus $u^3v^3 = 8$ en $u^3 - v^3 = 20$.
Nu kun je, net zoals op pagina 20, u en v berekenen door u^3 uit te drukken in v^3 en de vergelijking

$$v^6 + 20v^3 - 8 = 0$$

op te lossen. En als je weet wat u en v zijn kun je $x = u - v$ berekenen (zie opgave 2).

Opgave 6: Vind een oplossing van de vergelijking $x^3 + 9x - 26 = 0$ zoals *Cardano* dat deed. Doe dit op de meetkundige manier. Geef duidelijke uitleg bij de plaatjes.

Opgave 7: Vind op de algebraïsche manier een oplossing van de volgende vergelijkingen.

a. $x^3 + 15x - 200 = 0$

b. $x^3 + 4x - 39 = 0$

c. $3x^3 + 9x = 228$

2.2 Zijn er nog andere oplossingen?

De algebraïsche manier van oplossen geeft ons steeds één oplossing van de vergelijking. Zijn er nog meer oplossingen en zo ja, hoe bepaal je die? Dat onderzoeken we in deze paragraaf.
We beschouwen weer de vergelijking

$$x^3 + 6x - 20 = 0.$$

We hebben in de vorige paragraaf één oplossing gevonden van deze vergelijking namelijk $x = 2$. We onderzoeken nu of er nog meer oplossingen zijn. Je kunt nagaan dat

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 10) = x^3 + 6x - 20.$$

Dus als je de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ wilt oplossen, kun je ook

$$(x^2 + 2x + 10)(x - 2) = 0$$

oplossen en dit geeft

$$x^2 + 2x + 10 = 0 \quad \text{of} \quad x - 2 = 0.$$

$x - 2 = 0$ geeft de oplossing $x = 2$ (deze hadden we al gevonden). En je weet ook, hoe je $x^2 + 2x + 10 = 0$ kunt oplossen.

Opgave 8: Los $x^2 + 2x + 10 = 0$ algebraïsch op.

Je hebt nu gezien dat $x^3 + 6x - 20 = 0$ maar één oplossing heeft.
Maar hoe vind je dat

$$x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + 2x + 10)?$$

Om deze ontbinding te vinden beginnen we met $(x-2)$ zo vaak van $x^3+6x-20$ af te halen dat er geen x^3 meer in de uitkomst staat. We halen $(x-2)$ daarom eerst x^2 keer van $x^3 + 6x - 20$ af:

$$x^3 + 6x - 20 - x^2(x - 2) = 2x^2 + 6x - 20.$$

Merk op dat er nu inderdaad geen term x^3 meer voorkomt in datgene wat we overhouden. Nu zorgen we ervoor dat ook de x^2 term verdwijnt. Dit doen we door van $2x^2 + 6x - 20$ nog eens $2x$ keer $(x - 2)$ af te trekken.

$$2x^2 + 6x - 20 - 2x(x - 2) = 10x - 20.$$

Vervolgens zie je dat er geen x^2 term meer voorkomt. Tenslotte trekken we nog eens 10 keer $x-2$ af van de $10x-20$ die we net overhielden.

$$10x - 20 - 10(x-2) = 0.$$

Uiteindelijk houden we dus niks over. We zien dan dat

$$x^3 + 6x - 20 - x^2(x-2) - 2x(x-2) - 10(x-2) = 0.$$

Dus

$$x^3 + 6x - 20 - (x^2 + 2x + 10)(x-2) = 0.$$

Dit geeft

$$x^3 + 6x - 20 = (x^2 + 2x + 10)(x-2).$$

Je ziet nu dat je deze ontbinding kunt vinden door achtereenvolgens de hoogste machten van x weg te werken. En je weet nu dus hoe je kunt bepalen of een vergelijking meer dan één oplossing heeft.

Opgave 9: Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. (Geef alle oplossingen.)

a. $x^3 + 12x - 185 = 0$

b. $x^3 + 3x^2 - 27x + 7 = 3x^2 - 479$

c. $\frac{2x^3+x^2+84}{x^3+x^2-5x} = 1$

2.3 Vergelijkingen met meerdere oplossingen

Tot nu toe zijn we alleen nog maar derdegraads vergelijkingen tegengekomen die maar één oplossing hadden. We kijken nu naar een vergelijking met drie oplossingen. Tijdens het oplossen van deze vergelijking lopen we wel tegen een probleempje aan. Om dit probleem op de lossen moeten we "nieuwe getallen" introduceren.

We bekijken de vergelijking

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Je kunt gemakkelijk door invullen nagaan dat $x = 4$ een oplossing is van deze vergelijking. Vind je deze oplossing ook als je het algemene recept uit paragraaf 2.1 volgt? Laten we het proberen.

Opgave 10:	
a.	Stel $x = u - v$. Bereken $x^3 - 15x - 4$.
b.	Laat zien dat $u^3 = \frac{-125}{v^3}$ en $v^6 + 4v^3 + 125 = 0$.

Als we de vergelijking

$$v^6 + 4v^3 + 125 = 0$$

gaan oplossen, vinden we

$$v^3 = -2 + \sqrt{-121} \quad \text{en} \quad u^3 = 4 + v^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Nu hebben we een probleem, want in de uitdrukkingen voor u^3 en v^3 staat de wortel uit een negatief getal en we hebben geleerd dat deze niet bestaat. Betekent dit dat de vergelijking geen oplossingen heeft? Nee, want we hebben gezien dat $x = 4$ een oplossing is. Dus moeten we een manier vinden om dit probleem te omzeilen.

We stellen onszelf de vraag:

> Waarom bestaat de wortel uit een negatief getal niet?

Het antwoord is dat we geen getal kennen waarvan het kwadraat een negatief getal is. ($\sqrt{-121}$ is het getal dat kwadrateerd -121 oplevert.) Ons probleem zou dus opgelost zijn als we wel een getal hadden waarvan het kwadraat negatief is.

Stel je voor dat we een getal i hebben, waarvoor geldt $i^2 = -1$ dus $i = \sqrt{-1}$. Doe alsof we met het getal i net zo kunnen rekenen als met alle andere getallen die we kennen.
Dus
$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \cdot -1} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11i.$$
Nu zien we dat we v^3 en u^3 kunnen schrijven als
$$v^3 = -2 + 11i \quad \text{en} \quad u^3 = 2 + 11i$$
Merk op:
$$i^2 = -1 \quad \text{dus} \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i.$$
Ook berekenen we (later zullen we zien waar we dit voor nodig hebben)
$$\begin{aligned}(-2+i)^2 &= (-2+i)(-2+i) = 4 - 2i - 2i + i^2 \\ &= 4 - 4i - 1 = 3 - 4i\end{aligned}$$
en
$$\begin{aligned}(-2+i)^3 &= (-2+i)^2(-2+i) = (3-4i)(-2+i) \\ &= -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -6 + 11i + 4 \\ &= -2 + 11i.\end{aligned}$$
We weten nu dat
$$-2 + i = \sqrt[3]{-2 + 11i} = \sqrt[3]{v^3} = v.$$

Opgave 11: Bereken op dezelfde manier als hierboven $(2+i)^3$.

We zien dat
$$2 + i = \sqrt[3]{-2 + 11i} = \sqrt[3]{u^3} = u.$$
Nu we een uitdrukking hebben gevonden voor u en v kunnen we $x = u - v$ berekenen:
$$x = u - v = (2+i) - (-2+i) = 2 + i + 2 - i = 4.$$
Je ziet dat het getal $i = \sqrt{-1}$ uit de vergelijking valt. En je vindt een oplossing van de vergelijking
$$x^3 - 15x - 4 = 0$$
en wel de oplossing $x = 4$.

Het getal i wordt in de wiskunde een imaginair getal genoemd. Alle getallen waarvan het kwadraat een negatief getal is, zoals $\sqrt{-121} = 11i$, noemen **imaginaire getallen**.

Je hebt nu gezien dat we soms imaginaire getallen nodig hebben om een oplossing te kunnen vinden van derdegraads vergelijkingen. We voegen deze getallen daarom toe aan de getallen die we al kennen. Zoiets is in de geschiedenis wel vaker gebeurd. Eerst kende men alleen maar positieve getallen en toen er behoefte kwam aan negatieve getallen, werden deze getallen toegevoegd. Wiskundigen hebben bewezen dat we met de imaginaire getallen gewoon kunnen rekenen, zoals we dat doen met alle andere getallen die we kennen.

Als je bij een “gewoon” getal een imaginair getal optellen, zoals $2 + 11i$, dan noemen we dit een **complex getal**.
We weten dus dat we soms met complexe getallen moeten werken om derdegraads vergelijkingen op te lossen.

Opgave 12: Vind de andere oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$. Gebruik hiervoor de manier die is beschreven op pagina 23.

Opgave 13: We gaan de vergelijking $x^3 - 30x - 36$ algebraïsch oplossen.

a. Stel $x = u - v$ en bereken $x^3 - 30x - 36$.
b. Geef een uitdrukking voor u^3 en v^3. Maak hierbij zo nodig gebruik van het getal $i = \sqrt{-1}$.
c. Bereken $(3 + i)^3$ en $(-3 + i)^3$ algebraïsch.
d. Geef een uitdrukking voor u en v.
e. Bereken x exact.
f. Onderzoek of de vergelijking nog meer oplossingen heeft. Zo ja, geef deze oplossingen. (Gebruik hiervoor de manier die is beschreven op bladzijde 23.)

Opgave 14: Los de vergelijking $x^3 - 51x - 104 = 0$ algebraïsch op. Geef alle oplossingen. Tip: bereken $(4 + i)^3$ en $(-4 + i)^3$ waarbij $i = \sqrt{-1}$.

Het probleem dat wij zijn tegengekomen bij het oplossen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ beschrijft Cardano ook in zijn boek "Ars Magna". Hij was de eerste die opmerkte dat er zoiets moest zijn als de imaginaire getallen. Cardano was dan ook de eerste die de complexe getallen introduceerde, maar hij wist eigenlijk niet veel over deze getallen.
Rafael Bombelli (1526-1572, Italië) begreep meer van de complexe getallen. Hij schreef in 1572 het boek met de titel "Algebra" waarin hij complexe getallen beschreef. Hij introduceerde in dit boek de notatie i voor $\sqrt{-1}$. Bombelli zorgde er met dit boek voor dat de imaginaire getallen iets van hun bovennatuurlijke karakter verloren. Pas in de negentiende eeuw namen de complexe getallen een normale plaats in binnen de wiskunde.

Figuur 8: Bombelli

In het slotwoord vind je hoe je meer te weten kunt komen over het onderwerp complexe getallen.

2.4 De formule van Cardano

In de vorige paragrafen heb je gezien hoe je specifieke derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunnen oplossen. In deze paragraaf gebruiken we dat om een algemene formule af te leiden voor het oplossen van vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$.

We gaan de derdegraads vergelijking

$$x^3 + px + q = 0$$

oplossen door op het recept uit paragraaf 2.1 toe te passen.

Opgave 15:
a. Stel $x = u - v$ en bereken $x^3 + px + q$.
b. Bereken u^3 en v^3.
c. Bereken u en v.
d. Bereken x.
e. Laat zien dat $\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Je ziet dat de oplossing van de vergelijking

$$x^3 + px + q = 0$$

gelijk is aan

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

We hebben een algemene formule gevonden waarmee we derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunnen oplossen. Deze formule wordt de **formule van Cardano** genoemd.

Zoals al eerder is opgemerkt was Cardano niet de eerste die wist hoe je derdegraads vergelijkingen moest oplossen. Dat waren del Ferro (in 1526) en Tartaglia (in 1535). Zij ontdekten onafhankelijk van elkaar hoe je derdegraads vergelijkingen kunt oplossen. Tartaglia vertelde dit, na veel aandringen, in vertrouwen aan Cardano. Die beloofde deze methode strikt geheim te houden. In 1545 publiceert Cardano deze methode toch in zijn boek "Ars Magna". Cardano verbrak de belofte aan Tartaglia omdat hij er achter was gekomen dat niet Tartaglia maar del Ferro als eerste had ontdekt hoe je derdegraads vergelijkingen kon oplossen. Tartaglia had dit alleen herontdekt. Er ontstond een bittere strijd *tussen de twee heren. Want ondanks het feit dat Cardano bij deze methode netjes de naam van Tartaglia vermeldde, was Tartaglia woedend. Cardano had zijn belofte nooit mogen verbreken. Omdat Tartaglia zijn methode nog niet zelf had gepubliceerd, kreeg de formule algemene bekendheid onder naam van Cardano.*

2.5 Algemene derdegraads vergelijkingen

Je weet nu hoe je derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunt oplossen. Maar hoe los je algemene derdegraads vergelijkingen op? En bestaat er voor derdegraads vergelijkingen ook een soort "*abc*-formule"? In deze paragraaf zullen we deze vragen beantwoorden.

De algemene vorm van een derdegraads vergelijking is

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

waarbij a ongelijk is aan 0, want als $a = 0$, dan is het geen derdegraads vergelijking meer.

In paragraaf 2.1 heb je een recept geleerd om derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ op te lossen. We gaan nu de onbekende x in de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door een (andere) slim gekozen onbekende y. Op die manier wordt de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ een vergelijking van de vorm $y^3 + py + q = 0$. En deze kunnen we oplossen.
We kiezen voor de nieuwe onbekende $y = x + \frac{b}{3a}$. We kunnen ook zeggen $x = y - \frac{b}{3a}$.

Opgave 16: Stel $x = y - \frac{b}{3a}$.
a. Laat zien dat $x^2 = y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}$.
b. Laat zien dat $x^3 = y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}$.

In de volgende opgave vul je de uitdrukkingen die je gevonden hebt voor x, x^2 en x^3 in, in de vergelijking

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Opgave 17: Stel $x = y - \frac{b}{3a}$. Laat zien dat

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Opgave 17 levert de vergelijking

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0.$$

Deel beide kanten van het =-teken door a (we mogen delen door a, want a is niet 0):

$$y^3 + \frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a} y + \frac{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d}{a} = 0.$$

Deze vergelijking bevat geen kwadratische term meer. Je hebt dus een vergelijking gekregen van de vorm

$$y^3 + py + q = 0,$$

waarbij

$$y = x + \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{c - \frac{b^2}{3a}}{a} \quad \text{en} \quad q = \frac{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d}{a}.$$

In paragraaf 2.1 heb je geleerd hoe je derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunt oplossen. En nu je weet hoe je door x te vervangen door y, waarbij $y = x + \frac{b}{3a}$, een vergelijking van de vorm:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

kunt herschrijven tot een vergelijking van de vorm:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Je weet nu dus hoe je alle derdegraads vergelijkingen kunt oplossen.

Opgave 18: Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.
a. $5x^3 + 40 = -45x(x + 1)$
b. $2x^3 + 6x^2 + 12x + 16 = 0$
c. $5x^3 = 30x^2 - 15x - 50$

Opgave 19: Leid een algemene formule af voor het oplossen van algemene derdegraads vergelijkingen. Gebuik hiervoor de formule van Cardano (zie paragraaf 2.4). Laat in deze formule p en q staan.

Als we nu in de formule uit opgave 19 de uitdrukkingen voor p en q zouden invullen, krijgen we een soort van "*abcd*-formule", een algemene formule voor het oplossen van derdegraads vergelijkingen. Omdat deze formule dan erg lang en onoverzichtelijk wordt, zullen we deze formule hier niet opschrijven. De formule uit opgave 19 wordt in de wiskunde niet de "*abcd*-formule" genoemd; ook deze formule wordt de **formule van Cardano** genoemd.

Lodovico Ferrari (1522-1565) ontdekte als eerste hoe je ***vierdegraads vergelijkingen*** *kunt oplossen. Hij vond een algemene formule waarmee je alle vierdegraads vergelijkingen kunt oplossen. Ferrari was een leerling van Cardano. Ook de methode van Ferrari voor het oplossen van vierdegraads vergelijkingen werd door Cardano gepubliceerd in zijn boek "Ars Magna". Hij vermeldt hier wel bij dat Ferrari deze methode heeft gevonden op zijn verzoek.*

Je denkt nu misschien, als zo'n algemene formule voor derde- en vierdegraads vergelijkingen bestaat, zal er ook wel een algemene formule bestaan om ***vijfdegraads vergelijkingen*** *op te lossen. Maar dat is helaas niet waar. Voor vijfdegraads vergelijkingen bestaat zo'n algemene formule niet. Dat zo'n algemene formule niet bestaat voor vijfdegraads vergelijkingen is in 1824 bewezen door Niels Henrik Abel (1802-1829, Noorwegen). Abel heeft veel belangrijke wiskundige ontdekkingen gedaan in zijn korte leven, maar dit hadden er nog veel meer kunnen zijn als niet bijna alles hem zo tegen had gezeten. Abel is namelijk zijn hele leven erg arm geweest, ook was hij nogal verlegen en leefde hij in Noorwegen.*

Figuur 9: Abel

Figuur 10: Galois

Ook Evariste Galois (1811-1832, Frankrijk) deed onderzoek naar het oplossen van vijfdegraads vergelijkingen. Galois en Abel deden onafhankelijk van elkaar veel dezelfde ontdekkingen. Maar Galois ontdekte veel meer dan Abel. Hij was zijn tijd ver vooruit en werd daardoor toen ook niet begrepen. Galois was een genie, hij deed grote ontdekkingen voor de wiskunde. Maar hij stierf vroeg, op 20 jarige leeftijd in een duel om een dame.

Slotwoord

Je hebt nu veel geleerd over het oplossen van vergelijkingen. Je kunt tweedegraads vergelijkingen oplossen met behulp van kwadraatafsplitsen. En je weet waar de *abc*-formule vandaan komt.
Ook heb je gezien hoe je alle oplossingen kunt vinden van derdegraads vergelijkingen. En ben je er achter gekomen dat je hiervoor soms complexe getallen nodig hebt. Als je meer wilt weten over complexe getallen, bekijk dan bijvoorbeeld een van de volgende boekjes (beide te vinden op het internet):

- "Complexe getallen voor wiskunde D", geschreven door Jan van de Craats.
- "Wat? Nog meer getallen", geschreven door De kerngroep wiskunde D Eindhoven in samenwerking met Hans Sterk.

Je hebt ook gezien hoe je op een meetkundige manier een oplossing kunt vinden van een derdergraads vergelijking. Deze manier werkt niet voor alle derdegraads vergelijkingen maar alleen voor een bepaald type vergelijking. Voor de andere type's zijn er ook meetkundige oplosmethodes. Wil je hier meer over weten? Kijk dan eens in het boek:

- "Ars Magna" geschreven door Girolamo Cardano.

Je weet nu dat er voor derdegraads vergelijkingen ook een soort van *abc*-formule is, en wel de formule van Cardano.
Je hebt in deze module verschillende dingen kunnen lezen over de geschiedenis van het oplossen van vergelijkingen. Wil je meer weten over deze geschiedenis, bijvoorbeeld over de strijd tussen *Cardano* en *Tartaglia*? Kijk dan eens op de volgende website

- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html

Op deze site vind je biografiën van verschillende wiskundigen. Je kunt natuurlijk ook in de bibliotheek een boek over de geschiedenis van de wiskunde halen.
Is het oplossen van tweede- en derdegraadsvergelijkingen nog niet genoeg voor jou? Ben je nieuwsgierig geworden hoe je vierdegraads vergelijkingen moet oplossen? Probeer dit dan zelf uit te zoeken met behulp van internet en boeken uit de bibliotheek.

Docentenhandleiding

In de onderbouw wordt de *abc*-formule behandeld en leren de leerlingen hoe ze hiermee kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen. Maar ze leren vaak niet waar de *abc*-formule vandaan komt. In het eerste hoofdstuk van deze module wordt kwadraatafsplitsen uitgelegd en wordt met behulp hiervan de *abc*-formule afgeleid. In het tweede hoofdstuk ontdekken de leerlingen hoe ze derdegraads vergelijkingen kunnen oplossen. En wordt er antwoord gegeven op de vraag:

> Is er voor derdegraads vergelijkingen ook een soort van "*abc*-formule"?

Verder leren de leerlingen in deze module iets over de geschiedenis die bij dit onderwerp hoort.
Deze module is zo geschreven dat de leerlingen deze in principe zelfstandig kunnen doorwerken.

Vereiste voorkennis om deze module te maken is:

- Kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen met behulp van de *abc*-formule.
- Sommige kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen door te ontbinden in factoren.
- Vertrouwd zijn met derdemachts wortels (bijvoorbeeld $x^3 = 87$ kunnen oplossen).
- Wortels kunnen vereenvoudigen ($\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$).
- Kunnen rekenen met letters.

Bij de meeste paragrafen heb ik nog een opmerking:

- Paragraaf 1.1: hierin wordt kwadraatafsplitsen uitgelegd. Eerst algebraïsch en daarna wordt er aandacht besteed aan hoe men vroeger kwadratische vergelijkingen meetkundig oploste. De meetkundige manier die hier besproken wordt is niet op alle kwadratische vergelijkingen van toepassing, maar in opgave 5 vindt de leerling een methode om een ander soort kwadratische vergelijking meetkundig op te lossen.

- Paragraaf 2.1: hierin wordt uitgelegd hoe je derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunt oplossen. In tegenstelling tot paragraaf 1.1, waar eerst de algebraïsche methode wordt besproken, wordt hier eerst een vergelijking op een meetkundige manier (zoals men het vroeger deed) opgelost. Zodat voor de leerling, aan de hand van deze manier, aannemelijk wordt waarom we in de algebraïsche methode $x = u - v$ gebruiken.

- Paragraaf 2.2: hierin wordt uitgelegd hoe je, als je één oplossing van de vergelijking hebt gevonden, door te onbinden de andere oplossingen kunt vinden. Er wordt hier beschreven hoe je kunt ontbinden. Bij deze paragraaf moet u er op bedacht zijn dat de leerling zich kan afvragen waarom dit alles steeds zo mooi uitkomt, waarom er geen rest is. Verder is deze paragraaf misschien een mooi moment om de leerling te laten kennismaken met staartdelingen voor veeltermen.

- Paragraaf 2.3: hierin komen complexe getallen voor. Deze paragraaf is echter niet bedoeld als een cursus complexe getallen. Deze is alleen bedoeld om de leerling te laten inzien dat ze op een gegeven moment meer getallen nodig hebben dan ze op dat moment kennen. Je hebt namelijk complexe getallen nodig om een reële oplossing te vinden. In de geschiedenis ging het ook op deze manier, tijdens het oplossen van derdegraads vergelijkingen kwam men tot de conclusie dat er nog meer getallen moesten zijn. En niet zoals velen denken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

- Paragrafen 2.4 en 2.5: deze zien er voor de leerling waarschijnlijk moeilijk uit omdat er veel formules in staan en ze in deze paragrafen veel moeten rekenen met letters. Maar deze paragrafen zijn wel een goede oefening in algebraïsche vaardigheden.

- Paragraaf 2.5: het belangrijke resultaat waar we in deze module naar toe werken, de formule van Cardano, wordt in paragraaf 2.4 bereikt. In paragraaf 2.5 worden algemene derdegraads vergelijkingen bekeken om alles volledig te behandelen. Maar bij tijdgebrek zou u er voor kunnen kiezen om paragraaf 2.5 niet te behandelen.

Tot slot wens ik u en uw leerlingen veel plezier met deze module.