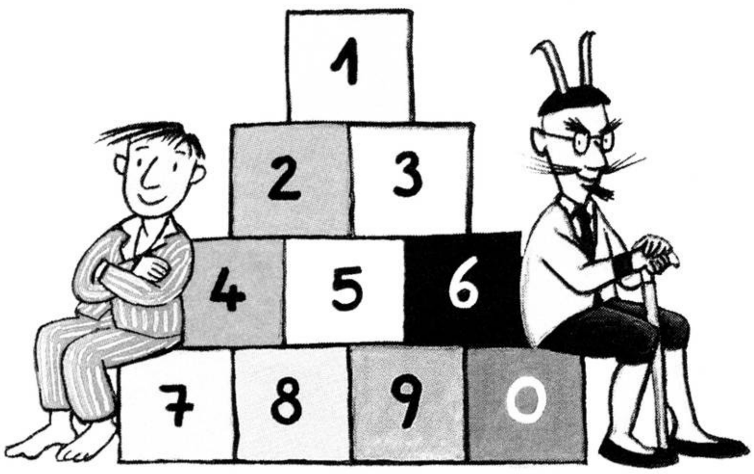
# De telduivel




**Een slaapverwekkende opdracht voor iedereen die van wiskunde durft te dromen**

*Een praktische opdracht voor leerlingen van 5VWO met wiskunde B*

***DE TELDUIVEL***

***Inleiding***

'Wiskunde? Hou op zeg! Voor veel mensen is wiskunde een warboel van getallen, sommen en onbegrijpelijke berekeningen. Ook Robert, de jongen in de blauwe pyjama, moet er niks van hebben. Tot hij bezoek krijgt van een telduivel en twaalf nachten lang met getallen aan het goochelen is. Dan blijkt dat wiskunde een spannend en grappig spel is dat Robert – en ook de lezers – geen enkele moeite kost. Wiskunde is niet moeilijk. Zodra de telduivel met zijn toverstok zwaait, verdwijnt de angst voor getallen als sneeuw voor de zon.'

Tot zover de tekst op de achterkant van het boek
"*De telduivel, een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde i*s"
van Hans Magnus Enzensberger (De Bezige Bij, Amsterdam, 1999, ISBN 90 234 8149 6).

Deze praktische opdracht bestaat uit drie delen. In het eerste deel maak je kennis met wiskundige uitspraken, vermoedens en bewijzen. In het tweede deel ga je twee hoofdstukken van 'De telduivel' lezen. Daar krijg je een aantal vragen over, die je in je groepje schriftelijk beantwoordt. In het derde deel schrijf je in hetzelfde groepje een nieuwe hoofdstuk bij dit boek: 'De dertiende nacht'.

***Deel A***

Deze praktische opdracht gaat over getallen en met name over *gehele getallen*. Dat zijn allereerst de *natuurlijke getallen* 0, 1, 2, 3, 4…, maar ook de hun tegengestelde getallen: -1, -2, -3, -4…, *de negatieve gehele getallen*. Deze getallen kun je optellen en vermenigvuldigen. Je weet al sinds de basisschool dat sommige getallen kunnen worden geschreven als product van kleinere getallen, zoals: $4=2\cdot 2$, $6=2\cdot 3$, $8=2\cdot 2\cdot 2$, $9=3\cdot 3$, enz. Andere getallen kunnen niet worden geschreven als product van kleinere getallen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … Deze laatste getallen hebben een naam.

**Definitie**: Een natuurlijk getal groter dan 1 dat niet het product is van twee kleinere natuurlijke getallen noemen wij een ***priemgetal***.

Hoe vind je zulke priemgetallen? Hoe weet je of je met een priemgetal te maken hebt? Hoeveel priemgetallen zijn er? Op hoeveel manieren kunnen getallen uiteenvallen in priemgetallen? Komt het vaker voor dat twee priemgetallen verschil 2 hebben, zoals 11 en 13 of 17 en 19? Kun je elk even getal schrijven als som van twee priemgetallen? Op sommige van deze vragen is het antwoord al ruim 2300 jaar bekend, maar op andere weet vandaag de dag nog geen mens het antwoord. Een groot deel van de wiskunde draait al duizenden jaren om het beantwoorden van zulke vragen over getallen. De vrucht van deze zoektocht van ontelbaar veel mensen noemen we *getaltheorie* – volgens de wiskundige Carl Friedrich Gauß (1777-1855) de koningin onder alle wiskundige theorieën. Tegenwoordig wordt getaltheorie veelvuldig toegepast; eigenlijk ook geen wonder want zodra je met getallen te maken hebt komen natuurlijk ook hun fundamentele eigenschappen kijken.

In dit eerste deel krijgen jullie een aantal beweringen voorgeschoteld waarvan jullie zelf moeten uitmaken of ze kloppen of niet. De conclusies dienen jullie met goede argumenten te onderbouwen. Jullie moeten zelf uitvinden, hoe. Je krijgt pas punten als je dat op een overtuigende manier lukt. Voor berekeningen mag je uiteraard je grafische rekenmachine inzetten. Om een aantal van deze beweringen te kunnen formuleren voeren wij nog even een notatie in.

Soms wil je het bij een natuurlijk getal over de cijfers hebben die erin voorkomen. Met het getal $c_3c_2c_1c_0$ bedoelen we $c_0\cdot 10^0 + c_1\cdot 10^1 + c_2\cdot 10^2 + c_3\cdot 10^3$. Bijvoorbeeld 4711 heeft de cijfers $c_3 = 4$, $c_2 = 7$, $c_1 = 1$, $c_0 = 1$.
Algemeen: $c_kc_{k-1}\ldots c_1c_0$ is een getal van k+1 cijfers; bijvoorbeeld $c_3$ is het aantal duizendtallen.

**Opdracht**
Probeer er achter te komen of de volgende beweringen waar zijn of niet. Kies eerst enkele voorbeelden. Als je denkt dat de bewering waar is, probeer je hem te bewijzen. Als je denkt dat de bewering niet waar is, geef je een tegenvoorbeeld. Als dat niet met elke bewering lukt, is dat niet zo erg.

1. Als een oneven natuurlijk getal geen priemgetal is, dan is het door 3, 5, 7, 11 of 13 deelbaar.
2. Er zijn natuurlijke getallen die op meerdere manieren kunnen worden ontbonden in priemfactoren.
3. Om de weten of een natuurlijk getal deelbaar is door 3 hoef je alleen de som van zijn cijfers te weten.
4. Om de weten of een natuurlijk getal deelbaar is door 4 hoef je alleen de laatste twee cijfers te weten.
5. We delen $10^k$ door 11. Als k even is, geeft de deling rest 1; als k oneven is, geeft de deling rest 10.
6. Bij een natuurlijk getal $n = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ kun je $A = c_0 – c_1 + c_2 – c_3 + c_4 – c_5 \ldots c_k$ berekenen. $n$ is deelbaar door 11 als $A$ deelbaar is door 11.
7. Er bestaan slechts eindig veel priemgetallen. Op 15 december 2005 hebben dr. Cooper en dr. Boone het 43ste Mersenne-priemgetal gevonden $2^{30402457}–1$.
8. Voor alle natuurlijke getallen $n > 0$ geldt: $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0} = 2^{n-1}$.
9. Als je vier opeenvolgende getallen vermenigvuldigt en je bij de uitkomst 1 optelt, dan krijg je altijd een kwadraat.
10. $n^2 + n + 41$ is voor elk getal n een priemgetal.
11. $a$ is deelbaar door 6. Is $a$ deelbaar door 3?
    $a$ is deelbaar door 3. Is $a$ deelbaar door 6?
    $a$ is deelbaar door 2 en door 3. Is $a$ deelbaar door 6?
    $a$ is deelbaar door 4 en door 6. Is $a$ deelbaar door 24?
    $a$ is deelbaar door 4 en door 6. Is $a$ deelbaar door 12?
    $a$ is deelbaar door 100. Is $a$ deelbaar door 4?
12. Er zijn minstens twee getallen $n$, waarvoor $n^3 - 1$ een priemgetal is.

***Deel B 1*** Lees de tekst van 'De derde nacht' door en beantwoord de volgende vragen:
1. In deze nacht worden drie wiskundige vermoedens verteld. Formuleer deze vermoedens zo nauwkeurig mogelijk.
2. Probeer na te gaan (bijvoorbeeld door wiskundigen te raadplegen of informatie te zoeken op internet) of deze vermoedens ondertussen bewezen stellingen zijn, of dat het nog onbewezen vermoedens zijn. Misschien zijn er wel tegenvoorbeelden gevonden, zodat bewezen is dat ze niet waar zijn.

***Deel B 2*** Lees de tekst van 'De vijfde nacht' en beantwoord de volgende vragen:
3. In deze droom worden twee wiskundige formules aannemelijk gemaakt. Schrijf deze formules op.
4. Geef een wiskundig bewijs voor deze formules.

***Deel C***
In het boek *De telduivel* is elke droom van Robert gemotiveerd door een wiskundige achtergrond. Achter bijna elk detail en elke keuze die de auteur heeft gemaakt gaat een wiskundig aspect schuil. Schrijf nu zelf: *De dertiende nacht*. Ga niets verzinnen dat volledig los staat van je wiskundig onderwerp. Zorg dat je verhaal in dienst staat van de wiskunde waar je het over wil hebben. Probeer dit in het verhaal op een eenvoudige en eerlijke manier uit te leggen.

In de keuze van het onderwerp ben je in principe vrij (originaliteit wordt op prijs gesteld), maar je kunt ook uit de onderstaande onderwerpen kiezen.

1. Pythagoreïsche drietallen.
2. Waarom is er bij de decimale schrijfwijze van breuken sprake van (op den duur) repetitie?
3. Tovervierkanten.
4. Wat zouden 'vijfhoekige getallen', 'zeshoekige getallen' of '$n$ -hoekige getallen' kunnen zijn? Kun je formules voor zulke 'vijfhoekige getallen', 'zeshoekige getallen' of 'n-hoekige getallen' geven? Een oplossing zou kunnen zijn: $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(2n-0)$, $\frac{1}{2}n((3n-1)$,
   $\frac{1}{2}n(4n-2)$, $\frac{1}{2}n(5n-3)$ enz..
5. Op hoeveel nullen eindigt 1000!? (Antwoord 249) En $n$! ?
6. Syracuserij: Als $n$ even is, deel je door 2, als $n$ oneven maak je $3n+1$. Voorbeeld: begin je met 11 dan krijg je: 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 16 – 8 4 – 2 – 1. Eindigt dit altijd op 1?
7. Het Kaprekargetal. Voorbeeld 981 – 189 = 792; 972 – 279 = 693; 963 – 369 = 594; 954 – 459 = 495. Dit noemen we het Kaprekargetal bij getallen van 3 cijfers. Bestaat er ook een Kaprekargetal van 4 cijfers? En van 5 cijfers?
8. Wat is het grootste getal dat je niet kunt schrijven in de vorm $5n + 8m$? Hierbij zijn $m$ en $n$ natuurlijke getallen. Meer in het algemeen: $an + bm$?
9. Repunits. R(1) = 1, R(2) = 11, R(3) = 111, dus R($n$) = 11111…….111 ($n$ enen). Zitten hier priemgetallen bij? Beschrijf de priemdelers van repunits. Kwadraten? Wanneer zijn R($n$) en R($m$) onderling ondeelbaar? Neem eens de kwadraten van R(4) en van R(10).
10. Hoe te zien dat een getal deelbaar is door 2, 3, 4, ……., 11, 12, 13?
11. Wat is het verband tussen GGD($a,b$) en KGV($a$,b)? En wat tussen GGD($a,b,c$) en KGV($a,b,c$)?
12. Hoe kun je snel aan zijn priemfactorontbinding zien of een getal een kwadraat is?
13. Kun je elk getal schrijven als een breuk?
14. De rij $n$ + INT(0,5 + $\sqrt{n}$) is de rij natuurlijke getallen, waarbij de kwadraten worden overgeslagen. Hierin betekent INT( ): afronden naar beneden op een geheel getal. Dus INT(1,5) = 1 , INT(1,91) = 1 en INT(2,2) = 2
15. Kun je elk getal schrijven als een breuk?
16. De verdeling van damstenen.
17. Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen.
18. Met staafjes een rechthoek vullen.
19. Stapelgetallen
20. Het aantal delers van een getal.
    Welk getal van vier cijfers heeft de meeste delers? (Dit zijn er twee nl. 7560 en 9240. Beide hebben 64 delers.)
21. Voorbeelden: 47 x 43 = 2021 (4x5 = 20 en 7x3 = 21) en 38x32 = 1216 (3x4 = 12 en 8x2 = 16). Hoe werkt dit?
    Rekenspelletjes maken zoals: Iemand doet in stilte de volgende berekening:
    -neem rangnummer van je geboortemaand
    -vermenigvuldig dat getal met 2
    -tel hier 5 bij
    -vermenigvuldig het resultaat met 50
    -tel ten slotte je leeftijd erbij
    Laat het resultaat hardop noemen, trek er in gedachte 250 af en noem vervolgens zijn leeftijd
    Geef met haakjes verdrijven een algemeen bewijs van de werking van dit spelletje.
22. Ontdek een aantal manieren om snel een kwadraat te kunnen uitrekenen.
    Leg de werking van de boerenvermenigvuldiging uit:
    235 x 72 = 470 x 36 =940 x18 =1880 x 9 =3760 x 4= 7520 x 2= 15040 x 1
    dus 1880 + 15040 =16920 is de uitkomst.
23. Er is maar een natuurlijk getal waarvan de wortel gelijk is aan de som van de cijfers. Welk getal is dat? Zijn er nog andere zulke eigenschappen te bedenken waarmee enkele getallen uit kunnen blinken?

Daarnaast bevelen wij als mogelijke bronnen aan:

- Het wiskundetijdschrift *Pythagoras* voor jongeren. Zoek ook op: http://www.pythagoras.nu.
- *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* http://www.research.att.com/~njas/sequences
- De website http://www.ratio.ru.nl voor inspirerende computerapplets over getalbegrip.

**AANVULLENDE TOELICHTING**

**1. Pythagoreïsche drietallen**
Drietallen, die aan de stelling van Pythagoras voldoen, noemen we pythagoreïsche drietallen.
Een voorbeeld: (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal omdat $3^2 + 4^2 = 5^2$.
We zoeken naar "echte" pythagoreïsche drietallen. Daarmee bedoelen wij drietallen, die onderling priem zijn, dus geen gemeenschappelijke delers hebben. Weer een voorbeeld: (6, 8, 10) is ook een pythagoreïsch drietal, maar deze kunnen we gemakkelijk vinden uit ons eerste voorbeeld (3, 4, 5) door elk getal met 2 te vermenigvuldigen en zo is (6, 8, 10) eigenlijk "hetzelfde" pythagoreïsch drietal als (3, 4, 5).

Twee recepten om pythagoreïsche drietallen te krijgen zij de volgende:
- Neem een oneven getal bijvoorbeeld 3, kwadrateer dit getal en verdeel dit kwadraat "zo eerlijk mogelijk".

Dus $3^2 = 9$ en $9 = 4 + 5$. We vinden dus de getallen 4 en 5, en (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal.
- Nemen we 7, dan verdelen we het kwadraat van 7 (=49) in 24 en 25 en (7, 24, 25) is een pythagoreïsch drietal. Nemen we 9, dan verdelen we het kwadraat van 9 (=81) in 40 en 41 en (9, 40, 41) is een pythagoreïsch drietal. Of neem een oneven kwadraat $(2k+1)^2$ dan is de som van alle oneven getallen die kleiner zijn dan $(2k+1)^2$ weer een kwadraat. Als je deze twee kwadraten optelt krijg je een derde kwadraat en zodoende een pythagoreïsch drietal. Kun je dit bewijzen?

Zo vinden we alle "echte" pythagoreïsche drietallen, of niet soms?

**7. Het Kaprekarproces**
We nemen een getal van 3 verschillende cijfers, bv. 819. We maken hiervan twee nieuwe getallen, waarbij bij de een de cijfers in stijgende (189) en bij de andere de cijfers in dalende (981) volgorde staan. Deze getallen trekken we van elkaar af, de kleinste van de grootste (981 – 189 = 792). Dit proces herhalen we. In ons voorbeeld:
972 – 279 = 693; 963 – 369 = 594; 954 – 459 = 495. Hier eindigt het proces en het getal 495 wordt het Kaprekargetal van 3 cijfers genoemd. Probeer maar eens een ander getal van 3 cijfers.
De vraag nu is: hoe zit dit?
Trouwens: is er ook een Kaprekargetal van 4 of van 5 cijfers?

**8. Muntstelsel**
We willen een nieuw muntstelsel invoeren met een minimum aantal verschillende muntstukken. We denken hierbij aan twee muntstukken, met ieder een waarde van minstens 5.
Als voorbeeld nemen we muntstukken met een waarde van 5 en een waarde van 8.
Hiermee gaan we betalen. Bijvoorbeeld een bedrag van 47 betalen we met 3 munten van 5 en 4 munten van 8.
Maar nu is niet elk bedrag met deze twee muntsoorten te betalen, zeker kleine bedragen niet, neem maar eens bijvoorbeeld 19.
De vraag is: welke bedragen zijn wel uit te drukken in munten van 5 en 8 en welke niet?
Is er een grootste bedrag dat niet te betalen is met deze twee muntsoorten?
Hoe zit het met de twee muntsoorten a en b, waarbij a en b allebei minstens 5 zijn en a en b onderling priem?

**9. Repunits**
Repunits zijn getallen, die uit louter enen bestaan. De rij repunits R(n) ziet er als volgt uit:

R(1) = 1
R(2) = 11
R(3) = 111
R(4) = 1111

R(n) = 1111….1 in het totaal n enen.

Je kunt je dan van alles afvragen, bijvoorbeeld: zitten er in de rij repunits ook priemgetallen? Hoe zien die eruit?
Bekijk eens de kwadraten van bijvoorbeeld R(4) of R(10). Wanneer zijn R(n) en R(m) onderling ondeelbaar?

**10. Deelbaarheidscritreria**
Soms wil je het bij een natuurlijk getal over de cijfers hebben die erin voorkomen. Met het getal $c_3c_2c_1c_0$ bedoelen we $c_0\cdot 10^0 + c_1\cdot 10^1 + c_2\cdot 10^2 + c_3\cdot 10^3$. Bijvoorbeeld 4711 heeft de cijfers $c_3 = 4$, $c_2 = 7$, $c_1 = 1$, $c_0 = 1$.

Een natuurlijk getal $n = c_kc_{k-1}\ldots c_1c_0$ is deelbaar door 3 als $c_k+c_{k-1}+\ldots+c_3+c_2+c_1+c_0$ deelbaar is door 3.

Een natuurlijk getal $n = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ is deelbaar door 11 als $c_0 – c_1 + c_2 – c_3 + c_4 – c_5 \ldots c_k$ deelbaar is door 11.

Een natuurlijk getal $n = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ is door 7, 11 of 13 deelbaar als $c_k c_{k-1} | \ldots c_4 c_3 – c_2 c_1 c_0$ deelbaar is door 7, 11 of 13. (Tip"Bereken $7 \cdot 11 \cdot 13$.)

**16. Verdelen van damstenen**

Je neemt 10 damstenen en verdeelt deze in een willekeurig aantal stapeltjes; als voorbeeld nemen we 5 en 5. We nemen nu van elk stapeltje één steen af en vormen met deze stenen een nieuwe stapel. Dit procédé herhalen wij. In ons voorbeeld krijgen we:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Begin: | 5 | 5 | | | |
| Eerste stap: | 4 | 4 | 2 | | |
| Tweede stap: | 3 | 3 | 1 | 3 | |
| Derde stap: | 2 | 2 | | 2 | 4 |

Zo gaan we door. Er blijkt op den duur een stabiele situatie te ontstaan.

Nu een aantal vragen.

a. Stel we beginnen met een andere verdeling van deze 10 stenen – b.v. drie stapels van 1 steen, 2 stenen en 7 stenen- komen we dan ook op deze stabiele situatie uit? En geldt dit voor elke verdeling?
b. Stel we beginnen met een ander aantal damstenen, b.v. 12. Krijgen we dan op den duur ook een stabiele situatie? Hangt dit ook af van de beginverdeling?
c. Bij welke aantallen stenen krijgen we een stabiele situatie?
d. Bewijs dat je bij de onder c gevonden aantallen een stabiele situatie krijgt.

**17. Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen**

Een *perfect getal* is een getal dat gelijk is aan de som van al zijn delers. Bijvoorbeeld 6=1+2+3 of 28=1+2+4+7+14 zijn beroemde perfecte getallen. Niemand weet tot heden of er ook oneven perfecte getallen zijn. Ook weet niemand hoeveel even perfecte getallen bestaan.
Toon aan dat 496 en 8128 perfecte getallen zijn.

*Mersenne priemgetallen* zijn priemgetallen van de vorm $2^{n+1} - 1$ voor een natuurlijk getal *n*. Het zoeken naar nieuwe Mersenne priemgetallen is nog steeds in volle gang.
Bewijs dat geldt: als $p = 2^{n+1} - 1$ een Mersenne priemgetal is, dan is $A = 2^n p$ een perfect getal.

**18. Met staafjes een rechthoek maken**

*Stelling*: Gegeven een rechthoek met afmetingen $m \times n$ waarbij *m* en *n* natuurlijke getallen zijn. Stel nou dat deze rechthoek kan worden overdekt met staafjes van de lengte $1 \times k$ voor een natuurlijk getal *k*. Dan deelt *k* een van de getallen *m* of *n*.

a. Probeer een rechthoek van 9 keer 10 te overdekken met staafjes van 1 keer 6.
b. Kun je een bewijs van de stelling geven? Behulpzaam zou hierbij kunnen zijn dat je aan de vakjes in een rechthoek de getallen 1 tot en met *k* toekent. Let erop welke getallen door de staafjes worden afgedekt. Kun je de getallen zo toekennen dat er onder elk van de staafjes steeds alle getallen 1 tot en met *k* komen te liggen?

**19. Stapelgetallen**

Een getal dat geschreven kan worden als de som van twee of meer positieve, gehele, elkaar opvolgende getallen, noemen we *stapelbaar*. Voorbeelden: 140 = 14 + 15 + … + 21, dus 140 is stapelbaar; 141 = 70 + 71, dus 141 is stapelbaar.
In bovenstaande voorbeelden noemen we 14 en 70 het begin van een *stapel*. Een stapel die begint met 1 noemen we een *basisstapel*. Voorbeeld: 10 = 1 + 2 + 3 + 4. We zeggen in zo'n geval dat 10 een basisstapel heeft.
Een stapel die uit een even aantal getallen bestaat noemen we een *even stapel*.
Vragen:

1. Zijn alle oneven getallen stapelbaar?
2. Welke even getallen zijn niet stapelbaar?
3. Laat zien dat voor de som S van een stapel die begint bij a, en bestaat uit n getallen geldt: S = ½ n(n+2a-1).
4. Geef een beschrijving van de getallen die een basisstapel hebben.

Een positief geheel getal is altijd te schrijven op één manier als product van priemgetallen, bijvoorbeeld
$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

5. Hoeveel delers heeft het getal 5400?

6. Welke getallen hebben slechts één stapel?
7. Hoe kun je aan een getal zien dat het een even stapel heeft?
8. Hoeveel stapels heeft het getal 2004?
9. Kun je een getal vinden met precies 2004 stapels?

Zie ook: Dave Odegard, *Stapel*, Pythagoras, November 2004

**21. Vermenigvuldigen**

Als we bijvoorbeeld moeten uitrekenen 67 x 63 dan gaat dat als volgt:

$$
\begin{array}{r}
67 \\
\underline{63}\,\text{x} \\
201 \\
\underline{4020} \\
4221
\end{array}
$$

Dus 67 x 63 = 4221. Maar dit kan veel eenvoudiger. Kijk maar: Van de beide zessen hogen we er een op en vermenigvuldigen we ze met elkaar: 6 x 7 = 42. De 3 en de 7 vermenigvuldigen we met elkaar: 3 x 7 = 21. Deze twee getallen zetten we achter elkaar en we krijgen het juiste antwoord: 4221.
Nog een voorbeeld: 48 x 42. We nemen 4 x 5 = 20 en 8 x 2 = 16 dus 48 x 42 = 2016.
Waarom hebben ze ons dit nooit eerder verteld? Zijn er meer van deze “trucjes”?

**Beoordeling PO** **De telduivel**

**Groepsleden:** 1. ..............................
2. ..............................
3. ..............................

| **Onderdeel** | **Max** | **Score** | **Opmerkingen** |
|---|---|---|---|
| A1 | 3 | | |
| A2 | 3 | | |
| A3 | 3 | | |
| A4 | 3 | | |
| A5 | 3 | | |
| A6 | 3 | | |
| A7 | 3 | | |
| A8 | 3 | | |
| A9 | 3 | | |
| A10 | 3 | | |
| A11 | 3 | | |
| A12 | 3 | | |
| A13 | 3 | | |
| A14 | 3 | | |
| Uitwerking | 5 | | *Eén of meerdere A-onderdelen zijn op een verrassende en wiskundig correcte wijze aangepakt en opgelost* |
| B1 | 5 | | *Formulering 3 vermoedens derde nacht* |
| B2 | 5 | | *Informatie 3 vermoedens derde nacht* |
| B3 | 4 | | *Twee formules vijfde nacht* |
| B4 | 5 | | *Bewijs twee2 formules vijfde nacht* |
| C<br>Vrije deel | 25 | | *Creatief, authentiek, volledig, wiskundig correct* |
| Cosmetica | 5 | | *Uiterlijk, lay-out, overzichtelijk* |
| Tijd | 5 | | *Tijdig ingeleverd (planning)* |
| **Totaal** | | | **Cijfer = Totaal / 10 =** |