9 Impuls en impulsmoment

De wetten van Newton

In 1687 publiceerde de Engelse natuurkundige Isaac Newton zijn baanbrekende boek *Principia*, over de beweging van hemellichamen. Zijn redeneerstijl was wiskundig. Net als in de Euclidische meetkunde hanteerde hij uitgangspunten: stellingen die hij zonder bewijs poneerde. Vanuit die stellingen ging hij redeneren en rekenen. De uitgangspunten zijn later bekend geworden als "de wetten van Newton" en hebben de mechanica (leer van de wetten van evenwicht en beweging) tot Einstein (1905) volledig beheerst.

In hoofdstuk 3 hebben we hiermee kennis gemaakt. Hier zullen we ze kort herhalen.

De eerste wet van Newton
Als er geen uitwendige kracht werkt, blijft een massa zich eenparig rechtlijnig bewegen. Met andere woorden: er is een kracht nodig om de massa te dwingen zijn constante beweging te verlaten.

Opgave 1
a. Hoe zouden de planeten bewegen als er geen zon zou zijn?
b. De eerste wet van Newton wordt wel "de traagheidswet" genoemd. Vind je dat een goede naam?

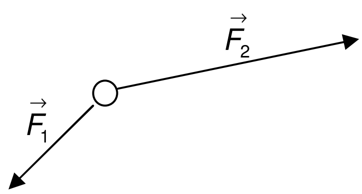
Opgave 2
Bij een touwtrekwedstrijd zijn de zware jongens van Pull Over goed opgewassen tegen de zware jongens van Hakken in het Zand. In het touw werken twee krachten.
Wat weet je van die krachten?

Newton ging verder in deze gedachtegang: kleine massa's zijn gemakkelijk (door een kleine kracht) uit hun constante beweging te brengen. Bij grote massa's is dat moeilijker. Hij preciseerde dit idee in

De tweede wet van Newton
De versnelling is evenredig met de kracht en omgekeerd evenredig met de massa.
In formule: $\vec{F} = \mathrm{m} \cdot \vec{a}$

Opgave 3
Hoe volgt de eerste wet van Newton uit de tweede wet?

Opgave 4
Er werken gelijktijdig twee krachten op een lichaam:
$\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$, zoals hiernaast aangegeven.
a. In welke richting beweegt het lichaam?



Als alleen $\vec{F}_2$ zou werken, zou het lichaam twee keer zo sterk versneld worden als wanneer alleen $\vec{F}_1$ zou werken.

b. Ga dat na in de tekening.

c. Is de versnelling nu beide krachten werken drie keer zo groot, als wanneer alleen $\vec{F}_1$ zou werken?

Opgave 4

Een vrachtwagen is tien keer zo zwaar als een personenwagen. Ze rijden met dezelfde snelheid, remmen op hetzelfde moment plotseling en staan tegelijk stil.

a. Hoe verhouden zich hun remvertragingen? (Dat zijn de versnellingen ten gevolge van het remmen.)

b. Hoe verhouden zich hun remkrachten?

De derde wet van Newton

actie = -reactie

Preciezer: Als een lichaam een kracht uitoefent op een ander lichaam, dan oefent het andere lichaam een even grote kracht uit op het eerste lichaam, en wel in tegengestelde richting.

Als die twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ zijn, geldt dus: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.

Opgave 5

Twee mensen staan op een spiegelgladde vloer; er is dus geen wrijving tussen hun voetzolen en de vloer. De mensen zetten zich tegen elkaar af.

a. Beschrijf wat er gebeurt als de mensen even zwaar zijn.

b. Beschrijf wat er gebeurt als de ene 2 keer zo zwaar is als de ander.

Opgave 6

Een astronaut maakt een ruimtewandeling. Hij zet zich af tegen de ruimtecapsule.

Wat gebeurt er? Zeg dit in termen van de derde wet van Newton.

Gravitatie

Newton stelde ook het volgende vast (dat is dus ook uitgangspunt voor zijn mechanica):

Een zon trekt een planeet aan (en omgekeerd). De grootte van de aantrekkingskracht is,

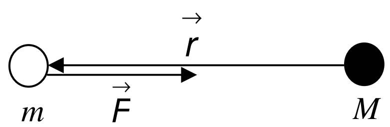
- evenredig met de massa van de zon,
- evenredig met de massa van de planeet,
- omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand.

Opgave 7
Mars is 1,52 keer zo ver van de zon als de aarde en heeft een 0,107 keer zo grote massa.
Wat weet je van de aantrekkingskrachten van de zon op beide planeten?

Ook deze wet hebben we al in hoofdstuk 3 gezien. Hij geldt tussen elk tweetal massa's.
In formulevorm: $F = G.\ M{\cdot}m\ /\ r^2$,
waarbij M en m de massa's zijn, r de onderlinge afstand en G de evenredigheidsconstante.
De gebruikte eenheden zijn: gravitatiekracht in N (=newton)
massa in kg
afstand in m
De zogenaamde **gravitatieconstante** G is ongeveer $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$. G is in het heelal overal hetzelfde. Daarom spreken we van de universele gravitatiewet.

F en r in bovenstaande formule zijn de lengte van vectoren. F is de grootte van de kracht $\vec{F}$, en $\vec{r}$ is de vector van de aantrekkende massa naar de aangetrokken massa. $\vec{F}$ en $\vec{r}$ zijn tegengesteld gericht. De evenredigheidsconstante G is positief.

Er geldt: $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$.



Opgave 8
a. Leg uit dat hieruit de formule $F = G.\ M{\cdot}m\ /\ r^2$ volgt.
b. Wat volgt hieruit over de richtingen van de kracht die M op m uitoefent en de vector van M naar m?

Opgave 9
De weegschaal geeft op aarde iemands gewicht aan: 80 kg. Op de maan geeft de weegschaal aan dat dezelfde persoon maar 13,25 kg weegt. De valversnelling op aarde is 9,8 m/s^2
a. Wat is de valversnelling op de maan?

De straal van de aarde is 6371 km en van de maan 1738 km.
b. Wat kun je hieruit afleiden betreffende de massa's van de aarde en de maan?

Opgave 10
Een astronaut maakt een ruimtereis, staande op een weegschaal. Bij zijn vertrek op aarde geeft de weegschaal 80 kg aan. Hoe verder hij van de aarde komt, des te lichter wordt hij. Op een gegeven moment geeft de weegschaal nog maar 1 kg aan.
Hoe ver is hij dan van het aardoppervlak verwijderd?

Impuls, impulsmoment en koppel

“Beweging” heeft bij Newton niet alleen met snelheid te maken, maar ook met massa. Hij voert voor de hoeveelheid beweging het begrip *impuls* in. Die is evenredig met de massa en met de snelheid. In formule $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

Opgave 11

Een massa beweegt met een zekere snelheid. Een tweede massa is 2 keer zo groot en gaat 3 keer zo snel.

Wat weet je van de impulsen van beide bewegingen?

De twee massa’s vormen samen één systeem. We gaan de impuls definiëren voor dat systeem.

De totale impuls $\vec{p}$ van een systeem van twee deeltjes met impuls $\vec{p_1}$ respectievelijk $\vec{p_2}$ wordt gedefinieerd door $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$.

Het zwaartepunt $\vec{z}$ van twee deeltjes met massa’s m_1 en m_2 en positievectoren $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$ is in hoofdstuk 4 gedefinieerd door $\vec{z} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r_1} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r_2}$.

De impuls $\vec{p_z}$ van het zwaartepunt wordt gedefinieerd door $\vec{p_z} = (m_1+m_2)\,\dot{\vec{z}}$.

Opgave 12

Beschouw een systeem van twee deeltjes met massa’s m_1 en m_2 en positievectoren $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$, die alleen onderling krachten op elkaar uitoefenen. De kracht die het eerste deeltje uitoefent op het tweede deeltje noemen we $\vec{F_{12}}$ en de kracht die het tweede deeltje uitoefent op het eerste deeltje noemen we $\vec{F_{21}}$. Vanwege Newtons derde wet geldt: $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$. De totale massa van het systeem noemen we m en de totale impuls $\vec{p_{tot}}$.

a. Toon aan dat voor de impuls $\vec{p_1}$ van het eerste deeltje geldt: $\dot{\vec{p_1}} = \vec{F_{21}}$.

Evenzo geldt: $\dot{\vec{p_2}} = \vec{F_{12}}$.

b. Toon door middel van differentiëren aan dat $\vec{p_{tot}}$ constant is.

c. Toon aan dat $\dot{\vec{z}} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\vec{p_{tot}}$ en laat zien dat hieruit volgt dat het zwaartepunt zich eenparig rechtlijnig beweegt.

d. Ga na dat de impuls van het zwaartepunt gelijk is aan de totale impuls.

Analoog aan het geval voor twee deeltjes kunnen we voor een systeem van n deeltjes met respectievelijke massa's m_1, m_2, …, m_n en positievectoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …, $\vec{r}_n$ het zwaartepunt $\vec{z}$ definiëren door $\vec{z} = \frac{m_1}{m}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m}\vec{r}_2 + \ldots + \frac{m_n}{m}\vec{r}_n$, waarbij $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ de totale massa van het n-deeltjessysteem is.

De totale impuls $\vec{p}_{tot}$ van het n-deeltjessysteem wordt gedefinieerd door $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n$, waarbij $\vec{p}_i$ de impuls van het i-de deeltje is.

Opgave 13

Bekijk een systeem van 4 deeltjes met massa's m_1, m_2, m_3 en m_4 en positievectoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ en $\vec{r}_4$ die alleen onderling krachten op elkaar uitoefenen. De kracht die deeltje i uitoefent op deeltje j noemen we $\vec{F}_{ij}$. Vanwege Newtons derde wet geldt telkens: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. De totale massa van het systeem noemen we weer m en de totale impuls $\vec{p}_{tot}$.

a. Toon aan dat ook in dit geval de totale impuls constant is.

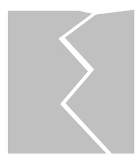
b. Ga na dat ook in dit geval de impuls van het zwaartepunt gelijk is aan de totale impuls.

Opmerking 1

De tweede wet van Newton zegt dat $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$. Je kunt dit ook schrijven als $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$.

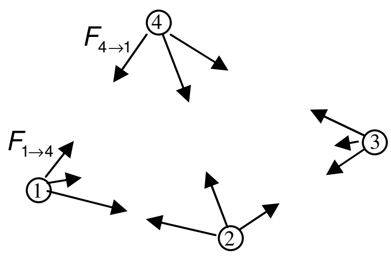
Opmerking 2

Een lichaam kunnen we opgesplitst denken in twee delen. Tussen die delen kunnen onderlinge krachten werken. De derde wet van Newton zegt dat de twee onderlinge krachten elkaar precies opheffen: hun som is $\vec{0}$. Als dat niet zo zou zijn, zou het geheel uit zichzelf een versnelling hebben. Maar daarvoor is een uitwendige kracht nodig.



Wet van behoud van impuls

Beschouw een systeem van n deeltjes. De kracht die deeltje i uitoefent op deeltje j noemen we $\vec{F}_{ij}$. De impuls van deeltje i noemen we $\vec{p}_i$.



Er geldt: $\Sigma\, \vec{F}_{ij} = \vec{0}$

Dus: $\Sigma\, \dot{\vec{p}}_i = (\Sigma\, \vec{p}_i)^{\bullet} = \Sigma\, \vec{F}_{ij} = \vec{0}$,

Dus: $\Sigma\, \vec{p}_i$ is constant.

In woorden: de totale hoeveelheid beweging in een gesloten systeem (zonder invloeden van buiten) is constant. In het bijzonder geldt dat voor het hele heelal. Als er ergens enige beweging verloren gaat, neemt elders de beweging met exact dezelfde grootte toe. En dat is zo vanaf de geboorte van de kosmos.

Niet alleen als een massa beweegt over een rechte lijn heeft hij een hoeveelheid beweging (dat is de (lineaire) impuls). Dat is ook het geval als zij draait in een cirkelbaan: die “hoeveelheid draaibeweging” is het zogenaamde impulsmoment. Net als de impuls is het impulsmoment evenredig met de massa en met de snelheid. Maar nu is de straal ook van belang. Als eenzelfde massa met de zelfde snelheid op een twee keer zo grote cirkel gaat draaien is hij moeilijker te vertragen of te versnellen. Bovendien is ook het impulsmoment een vector. Een beweging over een rechte lijn vindt plaats in de richting van die lijn: zo is de vector impuls dan ook gericht. Een draaiing vindt plaats in een vlak (de “richting” is nu een vlak). Om het ene van het andere draaivlak te onderscheiden gebruiken we een normaalvector van het vlak. Samengevat: het impulsmoment bij een cirkelbeweging is een vector die evenredig is met de massa, met de snelheid, met de straal en loodrecht staat op het draaivlak. Het uitproduct van $\vec{r}$ en $\vec{p}$ voldoet precies aan deze eisen.

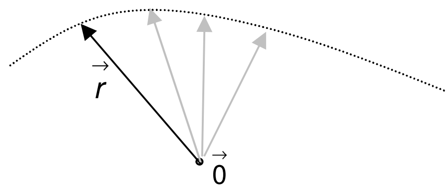
Ter herinnering: het uitproduct van $\vec{u}$ en $\vec{v}$ is: $\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2\,,\, u_3v_1 - u_1v_3\,,\, u_1v_2 - u_2v_1)$

Definitie

Voor een deeltje met positievector $\vec{r}$ en impulsvector $\vec{p}$ wordt het impulsmoment $\vec{L}$ ten opzichte van de oorsprong $\vec{0}$ gedefinieerd door $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. Het impulsmoment kan dus worden opgevat als de hoeveelheid draaiing om de oorsprong.

Opmerking

Deze definitie gebruiken we niet alleen voor een cirkelbeweging. Bijvoorbeeld ook voor een beweging langs een rechte lijn. De plaatsvector $\vec{r}$ draait tijdens een beweging rond de oorsprong.



Opgave 14

Bereken in elk van de volgende gevallen het impulsmoment $\vec{L}$ en ga na of $\vec{L}$ constant is. Neem hierbij aan dat de massa telkens 1 is.

a. Een deeltje beweegt volgens $\vec{r}(t) = (1+3t\,,\, 2-t\,,\, \text{-}3+5t)$.

b. Een deeltje beweegt volgens $\vec{r}(t) = (\cos(t)\,,\, \sin(t)\,,\, 0\,)$.

c. Een deeltje beweegt volgens $\vec{r}(t) = (t\cos(t)\,,\, t\sin(t)\,,\, 0\,)$.

d. Een deeltje beweegt volgens $\vec{r}(t) = (\cos(t)\,,\, \sin(t)\,,\, t\,)$.

Bij de bewegingen van opgave 14a en 14b blijkt het impulsmoment constant te zijn. Dit geldt voor elke eenparige rechtlijnige beweging en elke eenparige cirkelbeweging. Dat zullen we in de volgende opgaven nader bekijken.

Voor twee onafhankelijke vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ is het uitproduct meetkundig vastgelegd door:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{u}$ en op $\vec{v}$,
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\angle\alpha$, waarbij α de hoek is die de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ met elkaar maken. Dit is de oppervlakte van het parallellogram dat wordt opgespannen door $\vec{u}$ en $\vec{v}$.
- de richting van $\vec{u} \times \vec{v}$ wordt gegeven door de kurkentrekkerregel.

Opgave 15

Bepaal $\vec{L}$ voor het deeltje uit onderdeel b van opgave 14 met behulp van deze meetkundige beschrijving.

Opgave 16

Een deeltje met massa m beweegt volgens $\vec{r}(t) = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$, waarbij $\vec{u}$ en $\vec{v} \neq \vec{0}$ vectoren zijn.

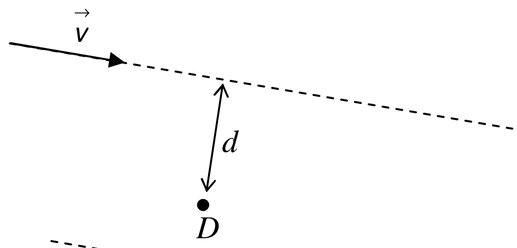
a. Laat zien dat het impulsmoment $\vec{L}$ gelijk is aan $m(\vec{u} \times \vec{v})$

b. Leg uit dat het impulsmoment $\vec{L}$ constant is.

Opgave 17

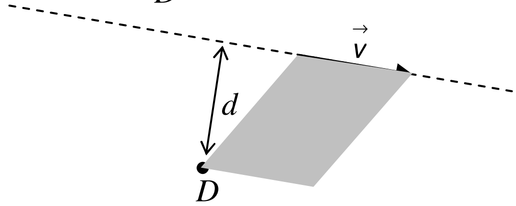
Een massa m beweegt met constante snelheid $\vec{v}$.
Het punt D ligt op afstand d van de baan van de massa.

a. Laat zien dat het impulsmoment ten opzichte van D constant is.



De grootte van het impulsmoment is de oppervlakte van het parallellogram dat hiernaast is getekend. Tijdens de beweging verandert de vorm van het parallellogram.

b. Leg uit dat de oppervlakte van het parallellogram niet verandert.



Dit laatste wordt fraai geïllustreerd in de volgende applet
http://www.phy.ntnu.edu.tw/oldjava/dutchjava/equalArea_nl/equalArea_nl.html

Opgave 18

Een deeltje met massa m beweegt volgens $\vec{r}(t) = (r\cos(\omega t)\ ,\ r\sin(\omega t)\ ,\ 0\ )$. Hierbij zijn r en ω positieve getallen.

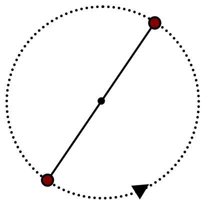
Laat zien dat het impulsmoment $\vec{L}$ gelijk is aan $(0, 0, m\omega r^2)$.

Merk op dat ook hier het impulsmoment $\vec{L}$ constant is.

Wet van behoud van impulsmoment
Bij de bewegingen van opgave 16 en 18 blijkt het impulsmoment constant te zijn. Dat is zo voor *elke* eenparig rechtlijnige beweging en elke eenparige cirkelbeweging in het *xy*-vlak met de oorsprong als middelpunt. Verderop zullen we zien dat het impulsmoment ook constant is voor de beweging van een planeet.

Het **totale impulsmoment** $\vec{L}_{tot}$ van het *n*-deeltjessysteem wordt gedefinieerd door
$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n$, waarbij $\vec{L}_i$ de impulsmoment is van het *i*-de deeltje is.

Opgave 19
Twee massa's van elk 1 kg zijn aan elkaar bevestigd door een gewichtloze staaf van 2 meter. Het geheel draait met snelheid van 1 m/s tegen de klok in.



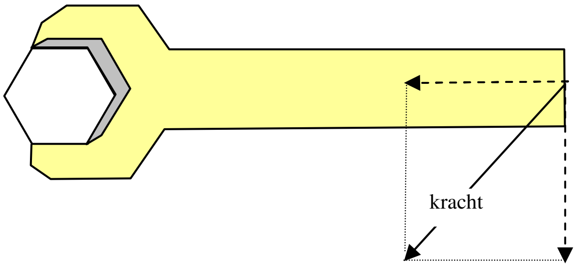
a. Bereken het impulsmoment van het geheel.

De staaf wordt tijdens het draaien verkort tot 1 meter.
b. Wat wordt dan de snelheid?

Een kunstschaatser maakt een pirouette. Hij zet de draaiing in met wijd uitgestrekte armen. Als hij zijn armen intrekt, wordt de draaiing versneld. Dit is hetzelfde effect als in opgave 19.

Hetzelfde effect kun je zien als je op een draaistoel zit. Neem in beide handen een groot gewicht en strek je armen uit. Ga nu draaien op de draaistoel. Door de gewichten naar je toe te trekken wordt de draaiing versneld.

Koppel
Iemand draait een moer aan met een sleutel. Hij oefent een kracht uit door aan het eind van de sleutel te trekken.
Het effect van zijn inspanning wordt bepaald door twee factoren: de kracht die hij uitoefent en de lengte van de sleutel. Bovendien is de richting van de kracht van belang. Het beste kan hij de kracht loodrecht op de sleutel uitoefenen; een kracht in de richting van de sleutel is zinloos.



Het effect van zijn inspanning moet een vector worden. Immers: er is niet alleen een grootte, maar er is ook sprake van een vlak waarin de draaiing zal plaatsvinden (daarin beweegt de sleutel). We kennen daarom een richting toe aan het effect van zijn inspanning: die staat loodrecht op het vlak waarin de draaiing zal plaatsvinden.

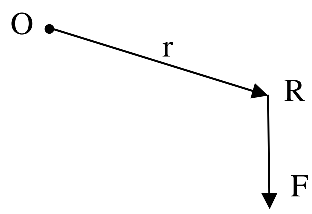
Het effect van zijn inspanning heet het **koppel**. De grootte daarvan is evenredig met de lengte van de sleutel en met de grootte van de component van de kracht in de richting loodrecht op de sleutel.

Algemeen:

Oefen een kracht $\vec{F}$ uit op plaats *R*

$\vec{OR} = \vec{r}$.

Dan is het koppel $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

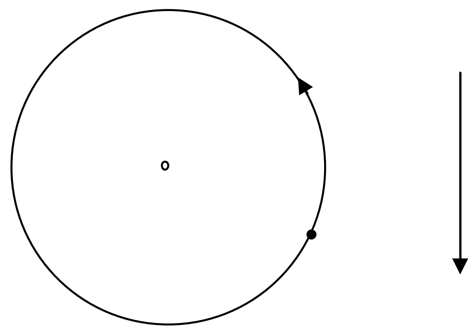


Opgave 20
Laat zien dat deze definitie voldoet aan de gestelde eisen in het voorgaande:
- evenredig met de afstand *r*,
- evenredig met de grootte van de component van de kracht, loodrecht op *OR*,
- een richting, loodrecht op het vlak waarin de draaiing plaatsvindt.

Opgave 21
Een massa *m* bevindt zich op een cirkel in een verticaal vlak. De massa is onderhevig aan de zwaartekracht.

a. In welke richting wijst het koppel t.o.v. het middelpunt?

b. Als het koppel maximale grootte 10 heeft, waar op de cirkelbaan is de grootte dan 5?



Opgave 22
Beschouw een deeltje met impulsmoment $\vec{L}$ en koppel $\vec{N}$.

$\vec{L}$ is een uitproduct. Om dat te differentiëren hebben een productregel nodig:

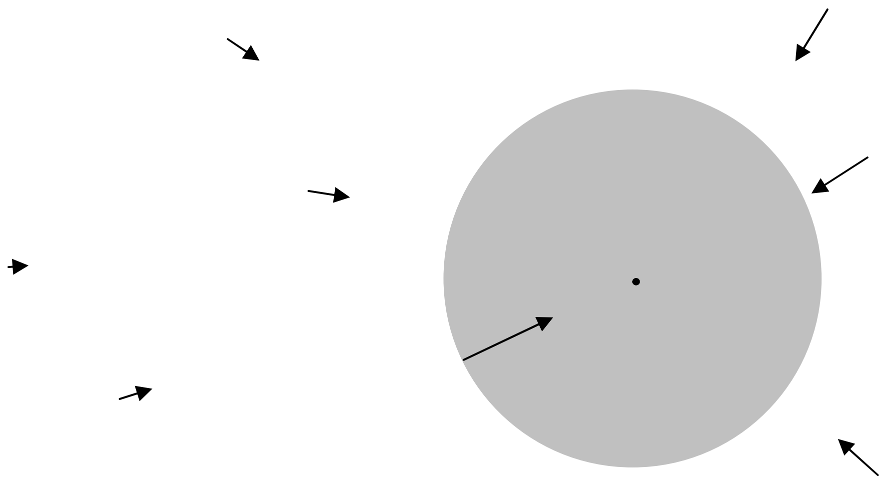
$(\vec{u} \times \vec{v})^{\bullet} = \dot{\vec{u}} \times \vec{v} + \vec{u} \times \dot{\vec{v}}$.

a. Toon aan dat $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$.

b. Leg uit dat $\vec{L}$ constant is, als op het deeltje geen enkele kracht werkt.

Een **centraal krachtenveld** is een krachtenveld, waarbij de krachtvector allemaal naar één punt toe wijzen of van één punt af wijzen. Als we dat centrum als oorsprong kiezen, ligt op elke plaats de krachtvector dus in het verlengde ligt van de positievector.

Een voorbeeld van een centraal krachtenveld is het zwaartekrachtveld van bijvoorbeeld de aarde. Op elke plek is de zwaartekracht gericht naar het middelpunt van de aarde.



Opgave 23
Het krachtenveld waarin een deeltje beweegt is centraal.

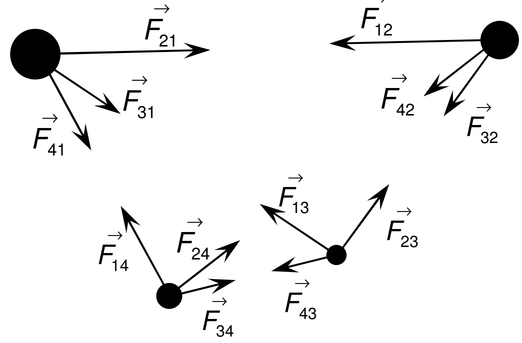
Leg uit dat $\vec{L}$ constant is.

Het **totale koppel** $\vec{N}_{tot}$ van een *n*-deeltjessysteem wordt gedefinieerd door $\vec{N}_{tot} = \vec{N_1} + \vec{N_2} + \ldots + \vec{N_n}$, waarbij $\vec{N_i}$ het koppel op het *i*-de deeltje is.

Opgave 24

Toon aan dat voor een systeem van *n* deeltjes geldt: $\dot{\vec{L}}_{tot} = \vec{N}_{tot}$.

Opgave 25
We bekijken een systeem van vier deeltjes waarop geen externe krachten werken. Op het eerste deeltje werken de krachten $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{31}$ en $\vec{F}_{41}$. Op het tweede deeltje werken de krachten $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{32}$ en $\vec{F}_{42}$; op het derde deeltje de krachten $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{23}$ en $\vec{F}_{43}$ en op het vierde deeltje de krachten $\vec{F}_{14}$, $\vec{F}_{24}$ en $\vec{F}_{34}$. Sommige van deze krachten kunnen eventueel gelijk zijn aan de nulvector. Vanwege Newtons derde wet geldt voor elk paar i,j dat $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. In onderstaande figuur is een mogelijke situatie weergegeven.



a. Ga na dat $\vec{N}_{tot}$ te schrijven is als

$\vec{r}_1 \times (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42}) + \vec{r}_3 \times (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43}) + \vec{r}_4 \times (\vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34})$.

b. Ga na dat dit kan worden herleid tot

$(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}) + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{13}) + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{41} + \vec{r}_4 \times \vec{F}_{14}) +$

$(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{32} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23}) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_{42} + \vec{r}_4 \times \vec{F}_{24}) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_{43} + \vec{r}_4 \times \vec{F}_{34})$.

c. Leg uit dat $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}$ en dat $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} = \vec{0}$

d. Leg uit dat $\vec{N}_{tot} = \vec{0}$ en dat $\vec{L}_{tot}$ dus constant is.

Opgave 26

We bekijken een systeem van vier deeltjes in een centraal krachtenveld. Op het eerste deeltje werkt behalve de krachten $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{31}$ en $\vec{F}_{41}$ ook de naar de oorsprong gerichte kracht $\vec{F}_{1C}$. Op het tweede deeltje werken de krachten $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{32}$, $\vec{F}_{42}$ en $\vec{F}_{2C}$; op het derde deeltje de krachten $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{43}$ en $\vec{F}_{3C}$ en op het vierde deeltje de krachten $\vec{F}_{14}$, $\vec{F}_{24}$, $\vec{F}_{34}$ en $\vec{F}_{4C}$. Sommige van deze krachten zijn eventueel weer gelijk aan de nulvector.

a. Ga na dat

$$\vec{N}_{tot} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \vec{F}_{1C}) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{2C}) + \vec{r}_3 \times (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{3C}) + \vec{r}_4 \times (\vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{4C}).$$

b. Leg uit dat ook in dit geval geldt dat $\vec{N}_{tot} = \vec{0}$ en dat dus $\vec{L}_{tot}$ constant is.

Algemeen

In een systeem van n deeltjes $(n \geq 1)$ geldt dat het totale impulsmoment constant is,

- als er geen externe krachten werken

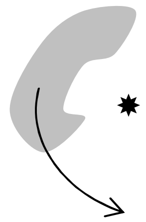
of

- als er sprake is van een centraal krachtenveld.

Baanimpulsmoment en spinimpulsmoment

Met behulp van het zwaartepunt kunnen we totale hoeveelheid beweging van een systeem van deeltjes goed analyseren.

Een zwerm muggen vliegt kriskras om een punt Z. (denk aan een warmtebron op een zomeravond). Neem eerst even aan dat *Z* op zijn plaats blijft. Elke afzonderlijke mug heeft een draaimoment ten opzichte van Z. Als je al die draaimomenten optelt, krijg je het totale draaimoment van de zwerm ten opzichte van Z.
Als bovendien *Z* beweegt (de zwerm blijft zich om *Z* bewegen), krijgt het draaimoment van de zwerm nog een tweede component, afhankelijk van de baan en de snelheid van Z.
De eerste is de interne component van het draaimoment van de zwerm; die heet het **spinimpulsmoment**. De tweede is externe component; die heet het **baanimpulsmoment**



Nu formeel.

Definitie
Voor een systeem van *n* deeltjes definiëren we:

- het **baanimpulsmoment** $\vec{L}_{\text{baan}}$ is het impulsmoment van het zwaartepunt $\vec{z}$ van het systeem ten opzichte van de oorsprong $\vec{0}$.

  In formule: $\vec{L}_{\text{baan}} = \vec{z}\times\vec{p}_z = \vec{z}\times\vec{p}_1 + \vec{z}\times\vec{p}_2 + \ldots + \vec{z}\times\vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{z}\times\vec{p}_i$.

- het **spinimpulsmoment** $\vec{L}_{\text{spin}}$ is het totale impulsmoment van alle deeltjes tezamen ten opzichte van het zwaartepunt $\vec{z}$ van het systeem.

  In formule: $\vec{L}_{\text{spin}} = (\vec{r}_1-\vec{z})\times\vec{p}_1 + (\vec{r}_2-\vec{z})\times\vec{p}_2 + \ldots + (\vec{r}_n-\vec{z})\times\vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i-\vec{z})\times\vec{p}_i$.

Stelling 1.
Voor een systeem van *n* deeltjes is het totale impulsmoment gelijk aan de som van spinimpulsmoment en baanimpulsmoment. In formule: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{spin}} + \vec{L}_{\text{baan}}$.

Opgave 27
Bewijs deze stelling voor een systeem van 3 deeltjes.

Stelling 2.
Voor een systeem van *n* deeltjes waarbij op het *i*-de deeltje naast interne krachten $\vec{F}_{ij}$ ook een externe kracht $\vec{F}_{i,\text{ext}}$ werkt geldt: $\dot{\vec{L}}_{\text{baan}} = \vec{z}\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i,\text{ext}}$.

Bewijs voor het geval n = 3.
We noemen de totale massa *m*. Dus $m = m_1 + m_2 + m_3$.

$$\dot{\vec{L}}_{\text{baan}} = \dot{\vec{z}}\times\vec{p}_z + \vec{z}\times\dot{\vec{p}}_z = \dot{\vec{z}}\times m\dot{\vec{z}} + \vec{z}\times m\ddot{\vec{z}} = \vec{0} + \vec{z}\times(m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 + m_3\ddot{\vec{r}}_3) =$$

$$\vec{z}\times\left((\vec{F}_{1,2}+\vec{F}_{1.3}+\vec{F}_{1,\text{ext}}) + (\vec{F}_{2,1}+\vec{F}_{2.3}+\vec{F}_{2,\text{ext}}) + (\vec{F}_{3,1}+\vec{F}_{3.2}+\vec{F}_{3,\text{ext}})\right) = \vec{z}\times(\vec{F}_{1,\text{ext}}+\vec{F}_{2,\text{ext}}+\vec{F}_{3,\text{ext}})$$

Stelling 3.
Een systeem van *n* deeltjes bevindt zich in een $1/r^2$-gravitatieveld ten gevolge van een zware massa in de oorsprong (de zon). Dat wil zeggen dat overal de kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de oorsprong.
Veronderstel dat de onderlinge afstanden erg klein zijn en blijven ten opzichte van de afstand tot de oorsprong.

Dan is $\dot{\vec{L}}_{\text{baan}} \approx \vec{0}$ en is dus $\vec{L}_{baan}$ ongeveer constant.

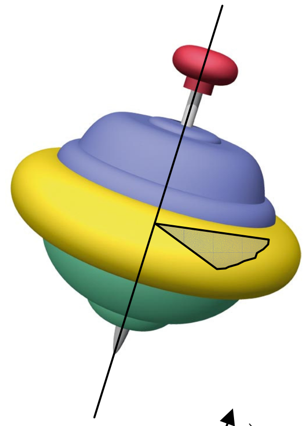
Bewijs. De externe kracht werkend op het *i*-de deeltje is de zwaartekracht als gevolg van de zonmassa *M*. Deze is volgens de zwaartekrachtformule gelijk aan $-\frac{GMm_i}{r_i^3}\vec{r}_i$. Omdat de onderlinge afstanden erg klein zijn, mogen we aannemen dat de afstand r_i niet echt afhangt van *i* en dus ongeveer constant is, zeg gelijk aan een constante *r*. Maar dan is, $\vec{F}_{1,\text{ext}} = -\frac{GMm_i}{r_i^3}\vec{r}_i = -\frac{GMm_i}{r^3}\vec{r}_i = -\frac{GM}{r^3}m_i\vec{r}_i = cm_i\vec{r}_i$ waarbij de constante $c = -\frac{GM}{r^3}$. Maar dan is $\dot{\vec{L}}_{\text{baan}} = \vec{z} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{ext}} \approx \vec{z} \times \sum_{i=1}^{n} cm_i\vec{r}_i = \vec{z} \times cm\vec{z} = \vec{0}$.

Een direct gevolg van stelling 3 is

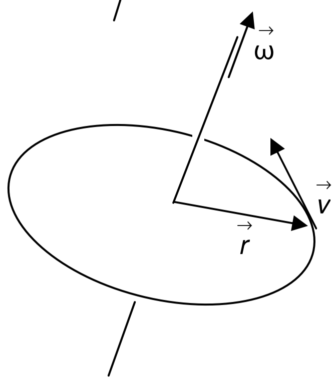
Stelling 4.
Bij een systeem als genoemd in stelling 3 is $\vec{L}_{\text{spin}}$ ook ongeveer constant.

Bewijs.
Dit volgt uit $\vec{L}_{\text{baan}}$ ongeveer constant is (stelling 3) en $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{spin}} + \vec{L}_{\text{baan}}$ (stelling 1) en $\vec{L}_{\text{tot}}$ constant is in een $1/r^2$-gravitatieveld, want dit is een centraal krachtenveld.

Hoeksnelheid en traagheidsmoment



Als een (star) lichaam draait om een zekere as, beschrijft een straal loodrecht op de draaias een hoek in de tijd.
Hoe sneller het lichaam draait, hoe groter de hoek die de straal per seconde beschrijft.
De **hoeksnelheid** ω van een eenparige cirkelbeweging (in radialen per seconde) definiëren we door $\omega = v/r$, waarbij v de snelheid is en r de straal van de cirkelbeweging.



Een draaiing heeft twee aspecten:
- de snelheid van de draaiing,
- de richting van de as waarom de draaiing gebeurt.

Het uitproduct geeft ons de mogelijkheid om zowel de snelheid als de richting van de draaiing in één enkele vector, de *hoeksnelheidsvector*, samen te vatten. Voor een puntdeeltje dat eenparig om de oorsprong beweegt, definiëren we de *hoeksnelheidsvector* $\vec{\omega}$ als de vector die wijst in dezelfde richting van de draaias en met grootte v/r. Als de beweging linksom is (zoals in het plaatje hiernaast), kiezen we $\vec{\omega}$ naar boven, als de beweging rechtsom is, naar beneden.

Opgave 28

Ga na dat $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Opgave 29

Een dunne staaf ligt zo dat één van de uiteinden zich in de oorsprong bevindt en draait eenparig om dit uiteinde in een vlak door de oorsprong.

a. Ga na dat de hoeksnelheidsvector voor elk punt van de staaf (behalve het draaipunt) hetzelfde is.

Een dunne cirkelvormige plaat waarvan het middelpunt zich in de oorsprong bevindt draait eenparig om dit middelpunt in het vlak waarin de plaat ligt.

b. Ga na dat de hoeksnelheidsvector voor elk punt van de plaat (behalve het draaipunt) hetzelfde is.

We kunnen op dezelfde manier nagaan dat de hoeksnelheidsvector goed gedefinieerd is voor elk plat (= tweedimensionaal) lichaam dat eenparig draait in het vlak waarin het zich bevindt. Maar hoe zit het met een star lichaam dat niet plat is en eenparig draait rond een as door de oorsprong? We kunnen het starre lichaam opdelen in puntdeeltjes die elk een eenparige beweging uitvoeren rond dezelfde as. We bekijken één van die puntdeeltjes, zeg met positie $\vec{r}$ en snelheid $\vec{v}$. De projectie van $\vec{r}$ op de draaias noemen we $\vec{e}$. Dan ligt $\vec{d} = \vec{r} - \vec{e}$ in het vlak door de oorsprong loodrecht op de draaias. De hoeksnelheidsvector van dit puntdeeltje kunnen we nu definiëren als de hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$ van de projectie $\vec{d}$. Maar omdat

$\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{d}$ (zie opgave 30), geldt ook nu weer dat de *hoeksnelheidsvector* $\vec{\omega}$ de (unieke) vector is, die wijst in de richting van de draaias en wel zo, dat $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Kortom: voor *elk* puntdeeltje van het massieve lichaam vinden we op deze manier dezelfde hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$ en er geldt telkens $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$.

Opgave 30

a. Maak een tekening bij bovenstaande uitleg.

b. Laat zien dat $\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{d}$.

Opgave 31

Bekijk een puntdeeltje met massa *m* dat eenparig om de oorsprong draait. We noemen de bijbehorende hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$.

a. Ga na dat $\vec{\omega}$ in dezelfde richting wijst als het impulsmoment $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

b. Ga na dat $L = mr^2\omega$.

Er geldt dus voor het puntdeeltje: $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$.

Opgave 32

Bekijk een puntdeeltje dat eenparig om een as door de oorsprong draait. We noemen de bijbehorende hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$. We nemen $\vec{e}$ en $\vec{d}$ zoals hierboven in het bewijs van stelling 5.

a. Laat zien dat $\vec{L} = m(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))$.

b. Laat zien dat $\vec{L} = m(\vec{d}\times(\vec{\omega}\times\vec{d}) + (\vec{e}\times(\vec{\omega}\times\vec{d})))$.

c. Toon aan dat $\vec{L} = m(d^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{e})\vec{d})$ Hint: Ga uit van onderdeel b en gebruik tweemaal de tripelproductformule $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

Stelling 5.

Een star lichaam draait om een as door de oorsprong en is symmetrisch in het vlak door de oorsprong loodrecht op die as. We noemen de bijbehorende hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$.

Dan geldt: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ voor zeker getal I. Het getal I heet het **traagheidsmoment** van het lichaam (bij draaiing om die bewuste as).

Bewijs.

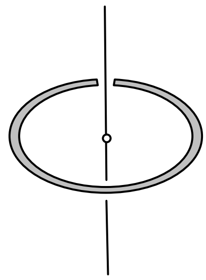
We delen het lichaam op in $2n$ puntdeeltjes, die paarsgewijs gespiegeld liggen ten opzichte van het symmetrievlak. We bekijken eerst het systeem bestaande uit één paar van zulke puntdeeltjes. De twee massa's zijn gelijk, zeg m. De positievectoren zijn te schrijven als $\vec{r_1} = \vec{d}+\vec{e}$ en $\vec{r_2} = \vec{d}-\vec{e}$ respectievelijk, waarbij $\vec{d}$ loodrecht staat op $\vec{\omega}$ en $\vec{e} = \lambda\vec{\omega}$ voor een zeker getal λ. Volgens opgave 32c geldt voor de impulsmomenten respectievelijk $\vec{L_1} = (d^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{e})\vec{d})$ en $\vec{L_2} = m(d^2\vec{\omega} + (\vec{\omega}\cdot\vec{e})\vec{d})$, zodat $\vec{L_1} + \vec{L_2} = 2m\,d^2\vec{\omega}$.

Omdat het lichaam is opgebouwd uit zulke onderling symmetrisch liggende paren puntdeeltjes, is $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{L}_{1,i} + \vec{L}_{2,i}) = \sum_{i=1}^{n} 2m_i d_i^{\,2}\,\vec{\omega} = (\sum_{i=1}^{n} 2m_i d_i^{\,2})\vec{\omega} = I\vec{\omega}$, waarbij $I = \sum_{i=1}^{n} 2m_i d_i^{\,2}$.

In de volgende opgaven bepalen we in drie stappen het traagheidsmoment van een homogene bol.

Opgave 33

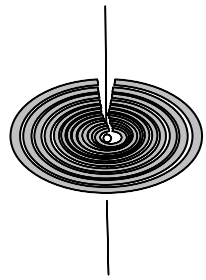
We bekijken een dunne homogene ring met straal r met massa *m*.
In het bewijs van stelling 5 hebben we voor het traagheidsmoment een formule gevonden: $I = \sum_{i=1}^{n} 2m_i d_i^{\,2}$.



Laat zien dat het traagheidsmoment van de ring ongeveer gelijk is aan mr^2 .

Opgave 34

We bekijken een homogene schijf met straal *R* en massa *m*.
Om zijn traagheidsmoment uit te rekenen vatten we de schijf op als een zeer groot aantal even brede, concentrische ringen.
Van één ring – zeg met straal *r* en breedte Δr - is de massa $2\pi mr\Delta r\ /\ \pi R^2$.



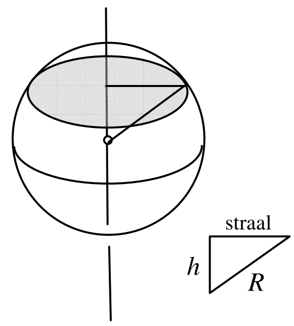
a. Leg dat uit.
b. Wat is het traagheidsmoment van de ring? Hint: gebruik opgave 33.

Het traagheidsmoment van de hele schijf vind je door de traagheids-momenten van al die ringen op te tellen. Door Δr vervolgens tot 0 te laten naderen gaat de som over in de integraal: $\int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r$.

c. Laat dat zien.
d. Laat zien dat het traagheidsmoment van de schijf gelijk is aan $\frac{1}{2}mR^2$.

Opgave 35

We bekijken een homogene bol met straal R en massa *m*.
Om zijn traagheidsmoment uit te rekenen vatten we de schijf op als een zeer groot aantal even dikke plakjes van dikte Δh.



a. Wat is de straal van het plakje op hoogte h boven het middelpunt, uitgedrukt in *R* en *h*?

De massa van het plakje op hoogte *h* boven het middelpunt en van dikte Δh is $\pi m\ (R^2 - h^2) \cdot \Delta h\ /\ \frac{4}{3}\pi R^3$.

b. Toon dat aan. Hint: de inhoud van een bol met straal R is $\frac{4}{3}\pi R^3$.
c. Wat is dus het traagheidsmoment van het plakje?

Het traagheidsmoment van de hele bol vind je door de traagheidsmomenten van al die plakjes op te tellen. Door Δh vervolgens tot 0 te laten naderen gaat de som over in de integraal: $\int_{-R}^{R} \frac{3}{8} \frac{m(R^2 - h^2)^2}{R^3} \mathrm{d}h$.

d. Laat dat zien.
e. Laat zien dat het traagheidsmoment van de bol gelijk is aan $\frac{2}{5}mR^2$.

Behoud van impulsmoment bij dubbelplaneten

Een dubbelplaneet bestaat uit twee bolvormige massieve lichamen die behalve om een eigen as, ook draaien om hun gemeenschappelijke zwaartepunt. Deze lichamen noemen we voor het gemak planeten. In de praktijk zal het ene lichaam een maan zijn en het andere lichaam een planeet. We mogen veronderstellen dat de dubbelplaneet in zijn geheel in een relatief grote cirkelbaan om de zon draait. Vanwege stelling 4 weten we dat het spinimpulsmoment van de dubbelplaneet (nagenoeg) constant is. Dit betekent dat we ons kunnen richten op de relatieve posities van de twee planeten ten opzichte van hun gemeenschappelijke zwaartepunt. Dit zwaartepunt kiezen we dan ook als oorsprong. De positievectoren van de centra van de planeten noemen we $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ en de bijbehorende massa's m_1 en m_2. In het algemeen zullen de twee planeten ellipsvormige banen beschrijven rond het gemeenschappelijke zwaartepunt. We zullen echter veronderstellen dat beide planeten cirkelvormige banen rond het zwaartepunt beschrijven en deze eenparig doorlopen. In de praktijk blijken de ellipsbanen namelijk vaak bijna cirkelvormig te zijn.

Opgave 36
We bekijken een dubbelplaneet met positievectoren en massa's zoals hierboven genoemd.

a. Leg uit dat $m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 = \vec{0}$.
b. Leg uit dat uit onderdeel a. volgt dat beide planeten rond het zwaartepunt draaien met dezelfde hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$.

Stelling 6.
Het totale impulsmoment van de dubbelplaneet ten opzichte van het zwaartepunt is constant en gelijk aan $I_1\,\vec{\omega}_1 + I_2\,\vec{\omega}_2 + (m_1\,r_1^{\,2} + m_2\,r_2^{\,2})\,\vec{\omega}$, waarbij $\vec{\omega}_1$ en $\vec{\omega}_2$ de hoeksnelheidsvectoren zijn van de draaiing van de planeten om hun eigen as en I_1 en I_2 de bijbehorende traagheidsmomenten.

Bewijs.
Het totale impulsmoment $\vec{L}$ ten opzichte van het zwaartepunt is gelijk aan het spinimpulsmoment ten opzichte van de ver wegstaande zon. Dit spinimpulsmoment is constant, vanwege stelling 4. We kunnen het totale impulsmoment $\vec{L}$ schrijven als $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$, waarbij $\vec{L}_1$ en $\vec{L}_2$ de impulsmomenten zijn van de planeet en de maan.
Er geldt: $\vec{L}_1 = \vec{L}_{1,\text{spin}} + \vec{L}_{1,\text{baan}}$ en $\vec{L}_2 = \vec{L}_{2,\text{spin}} + \vec{L}_{2,\text{baan}}$. Het bewijs wordt afgerond door het feit dat $\vec{L}_{1,\text{spin}} = I_1\,\vec{\omega}_1$, $\vec{L}_{1,\text{baan}} = m_1 r_1^{\,2}\vec{\omega}$, $\vec{L}_{2,\text{spin}} = I_2\,\vec{\omega}_2$ en $\vec{L}_{2,\text{baan}} = m_2 r_2^{\,2}\vec{\omega}$.

We weten dat $m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 = \vec{0}$. We definiëren $r = r_1 + r_2$.

Opgave 37
a. Ga na dat $m_1 r_1 = m_2 r_2$.
b. Laat zien dat $r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} r$ en $r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} r$.
c. Toon aan dat $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$.

We noemen $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ de **gereduceerde massa** van de dubbelplaneet.

Stelling 7.

Voor een dubbelplaneet is het totale impulsmoment gelijk aan $I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + \mu r^2\vec{\omega}$.
Deze uitdrukking is constant.

Dit volgt direct uit stelling 6 en opgave 37c.

Opgave 38
We bekijken een eenparige cirkelbeweging van een puntdeeltje met massa m.
a. Laat zien dat de versnelling is: $a = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$.
b. Laat zien dat voor de centripetale kracht geldt: $F_c = m\omega^2 r$.

De volgende stelling zegt hoe de hoeksnelheid waarmee de twee planeten om hun zwaartepunt draaien afhangt van hun massa's en onderlinge afstand.

Stelling 8.
Voor een dubbelplaneet hangt de hoeksnelheid ω op de volgende manier samen met de afstand r tussen beide planeten: $\omega = \sqrt{\dfrac{G(m_1 + m_2)}{r^3}}$.
Bewijs.
De benodigde centripetale kracht voor de eenparige cirkelbeweging van de ene planeet is $F_c = m_1\omega^2 r_1$. De gravitatiekracht tussen de twee planeten is $F_g = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$. Omdat alleen de gravitatiekracht kan zorgen voor de benodigde centripetale kracht, moet $F_g = F_c$. Wanneer we $r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} r$ (zie opgave 37b) invullen in F_c, dan volgt hieruit vrij eenvoudig (zie opgave 39) dat $\omega^2 = \dfrac{G(m_1 + m_2)}{r^3}$. Hiermee is de stelling bewezen.

Opgave 39

Laat zien hoe uit $F_g = F_c$ volgt dat $\omega^2 = \dfrac{G(m_1 + m_2)}{r^3}$.

Stelling 8 is een speciaal geval van de derde wet van Kepler die een verband aangeeft tussen de omlooptijd van planeten en hun onderlinge afstand. In het speciale geval van cirkelvormige banen zegt deze wet dat het kwadraat van de omlooptijd T evenredig is met de derde macht van hun onderlinge afstand r.

Opgave 40

Toon aan dat $T^2 = c \cdot r^3$ en bepaal de bijbehorende evenredigheidsconstante c.

Samenvatting hoofdstuk 9

- Gravitatiekracht: $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$

- Het zwaartepunt $\vec{z}$ van twee massa's m_1 en m_2 met positievectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ is
  $\vec{z} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2$.
  $\vec{p}_z = (m_1+m_2)\dot{\vec{z}}$

- **Wet van behoud van impuls**
  De totale impuls van een geïsoleerd systeem van een aantal deeltjes met impulsen p_i is constant.

- Het **koppel** $\vec{N}$ is gedefinieerd als $\vec{r} \times \vec{F}$.
  $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$

- In een systeem van deeltjes is het totale impulsmoment constant
  - als er geen externe krachten werken
  of
  - als er sprake is van een centraal krachtenveld.

- $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{spin}} + \vec{L}_{\text{baan}}$
  $\dot{\vec{L}}_{\text{baan}} = \vec{z} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{ext}}$

- Bij een eenparige cirkelbeweging geldt: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
  Voor een puntdeeltje dat eenparig om de oorsprong draait, geldt: $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$.

  Een star lichaam draait om een as door de oorsprong en is symmetrisch in het vlak door de oorsprong loodrecht op die as. Dan geldt: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ voor zeker getal I, het zg. **traagheids-moment** van het lichaam (bij draaiing om die bewuste as).
  Het traagheidsmoment van een bol met straal R bij draaiing om een middellijn is $\frac{2}{5}mR^2$.

- Dubbelplaneet: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ is de **gereduceerde massa**,
  $L_{\text{tot}} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + \mu r^2\vec{\omega}$ is het totale impulsmoment,
  $\omega = \sqrt{\dfrac{G(m_1+m_2)}{r^3}}$ is de hoeksnelheid.