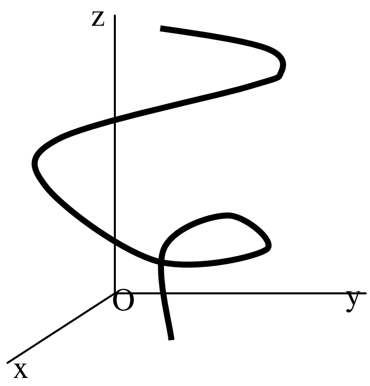
8 Krommen in de ruimte

Alles stroomt en niets blijft.
Herakleitos (6^e eeuw v. Chr.)

De baan van een bewegend deeltje in het vlak of in de ruimte is een **vlakke kromme** respectievelijk een **ruimtekromme**. In eerste instantie zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot ruimtekrommen. Voor vlakke krommen geldt een vrijwel analoog verhaal.

Na de keuze van een rechthoekig assenstelsel wordt een ruimtekromme **f** gegeven door drie coördinaatfuncties $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$, zo dat $((x(t), y(t), z(t))$ de plaats is van het bewuste deeltje op tijdstip *t*. Met andere woorden: $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ is de **positievector** van het deeltje op tijdstip *t*. We noemen $(x(t), y(t), z(t))$ een **parametrisering** of **parametervoorstelling** van de ruimtekromme **f**. We spreken ook wel van een **geparametriseerde kromme**. Eén en dezelfde kromme kan vele parametriseringen hebben (zie opgave 8.2).



We veronderstellen dat de collectie van alle tijdstippen t, waarop de beweging gedefinieerd is, een deelinterval is van $\mathbb{R}$ of de gehele $\mathbb{R}$. Als het niet nader is aangegeven, dan is de beweging gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeelden van geparametriseerde krommen zijn:

$\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$

$\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2 - 2t)$

$\mathbf{h}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Opgave 8.1.

a. *Wat is het snijpunt van de baan van* **f** *met het vlak* $z = 17$ *?*
b. *Wat is het laagste punt van de baan van* **g** *?*
c. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $z = 5$ *?*
d. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $x = 0{,}5$ *?*

Opgave 8.2. *Ga na hoe de baan van het deeltje er bij elk van de drie bovenstaande voorbeelden uitziet. Je kunt daarvoor op je grafische rekenmachine eerst een geschikte projectie tekenen. Teken bijvoorbeeld bij* **g** *de vlakke kromme geparametriseerd door:* $x(t) = 2t$ *en* $y(t) = t^2 - 2t$.

Opgave 8.3. *Gegeven zijn drie geparametriseerde ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

a. *Ga na dat de deeltjes bij deze drie parametriseringen dezelfde baan doorlopen.*
b. *Hoe bewegen de deeltjes bij* **p** *en* **q** *ten opzichte van elkaar?*
c. *Doorloopt het deeltje bij de parametrisering* $\mathbf{s}(\mathrm{t}) = (2\mathrm{t}^2, 4\mathrm{t}^2, -4\mathrm{t}^2)$ *ook de zelfde baan als bij* **p**, **q** *en* **r**?

Hoewel het dus strikt genomen verschillende dingen zijn, zullen we in het vervolg vaak spreken over een “kromme”, als we een “geparametriseerde kromme” bedoelen. Dit slordige taalgebruik leidt in de praktijk niet tot problemen en het maakt de zinnen wat minder lang.

Net als vectoren kunnen we krommen[5] optellen en met een reëel getal vermenigvuldigen. Dat gaat als volgt. Laat $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ en $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ twee krommen zijn. De kromme $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ wordt gedefinieerd door $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$. Voor een reëel getal λ wordt de kromme $\lambda\mathbf{f}$ gedefinieerd door $(\lambda\mathbf{f})(t) = \lambda \cdot \mathbf{f}(t)$. Net als bij vectoren spreken we af dat $-\mathbf{f} = -1 \cdot \mathbf{f}$ en $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{f} + (-\mathbf{g})$.

Opgave 8.4. *Beschouw nogmaals de ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$. *Geef parametriseringen van de ruimtekrommen* $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $-3\mathbf{r}$ *en* $2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

[5] Veel eigenschappen gelden op een analoge wijze voor vlakke en voor ruimtekrommen. Daarom spreken we in zulke gevallen over krommen.

Beschouw de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. De afstand van de plaats van het bijbehorende deeltje tot de oorsprong op tijdstip t is $|\mathbf{f}(t)|$. De afstandsfunctie, die wordt genoteerd met $|\mathbf{f}|$, wordt dus gedefinieerd door: $|\mathbf{f}|(t) = |\mathbf{f}(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$.

Opgave 8.5. *Bekijk de kromme* $\mathbf{k}(t) = (\cos^2(t), \sin(t)\cdot\cos(t), \sin(t))$.

a. *Laat zien dat de afstandsfunctie* $|\mathbf{k}|$ *constant gelijk is aan* 1.

b. *Wat betekent dit voor de baan van het bijbehorende deeltje?*

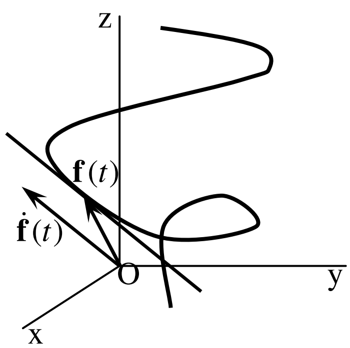
Een deeltje beweegt volgens de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. De **snelheidsvector** of kortweg **snelheid** van het deeltje op tijdstip t kunnen we bepalen door de gemiddelde snelheid op een klein tijdsinterval [t, $t+\Delta t$] te berekenen en daarna Δt tot nul te laten naderen. De gemiddelde snelheid van het deeltje op het tijdsinterval [t, $t+\Delta t$] is gelijk aan $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t))$. Dit herschrijven we tot:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(f_1(t+\Delta t) - f_1(t), f_2(t+\Delta t) - f_2(t), f_3(t+\Delta t) - f_3(t)\right) =$$

$$\left(\frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}, \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\right).$$

Laten we vervolgens Δt tot nul naderen, dan vinden we de snelheidsvector op tijdstip t: $\left(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)\right)$. Het differentiëren van een ruimtekromme gebeurt dus (net als van een vlakke kromme) coördinaatgewijs. [6]

De snelheidsvector behorende bij de plaatsvector $\mathbf{f}(t)$ noteren we met $\dot{\mathbf{f}}(t)$. De snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$ is parallel met de raaklijn aan de kromme in het punt $\mathbf{f}(t)$. De functie $\dot{\mathbf{f}}(t) = \left(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)\right)$ noemen we de **snelheidskromme** van de kromme **f**.



[6] De snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$ is alleen dan gedefinieerd, als de coördinaatfuncties f_1, f_2 en f_3 in t differentieerbaar zijn. Dit wordt stilzwijgend verondersteld. Meer nog: we gaan er vanuit dat alle drie de coördinaatfuncties onbeperkt vaak differentieerbaar zijn in alle tijdstippen t.

Opgave 8.6. *Bereken voor de krommen* **f**, **g** *en* **h** *van opgave 8.1 de bijbehorende snelheidskrommen* $\dot{\mathbf{f}}$, $\dot{\mathbf{g}}$ en $\dot{\mathbf{h}}$.

De **snelheid** van een bewegend deeltje op tijdstip t is de lengte van de snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$. De snelheid wordt genoteerd met $|\dot{\mathbf{f}}|$ en wordt gegeven door $|\dot{\mathbf{f}}|(t) = |\dot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2 + \left(f_3'(t)\right)^2}$.

De plaatsfunctie $\mathbf{f}$ en de snelheidsfunctie $\dot{\mathbf{f}}$ zijn vectorwaardige functies: $\mathbf{f}(t)$ en $\dot{\mathbf{f}}(t)$ zijn (ruimtelijke) vectoren. Maar de afstandsfunctie $|\mathbf{f}|$ en de snelheidsfunctie $|\dot{\mathbf{f}}|$ zijn reëelwaardige functies: $|\mathbf{f}|(t)$ en $|\dot{\mathbf{f}}|(t)$ zijn (niet-negatieve) getallen. Omdat in het Nederlands de term snelheid zowel wordt gebruikt voor de snelheidsvector als voor de grootte ervan, kan dit soms verwarring geven. In het Engels bestaat dit probleem niet, omdat de snelheidsvector daar wordt aangegeven met velocity en de grootte van de snelheidsvector met speed.

Opgave 8.7. *Bekijk weer de drie krommen van opgave 8.1.*

a. *Bereken de bijbehorende snelheidsfuncties* $|\dot{\mathbf{f}}|$, $|\dot{\mathbf{g}}|$ *en* $|\dot{\mathbf{h}}|$.

b. *In welk punt heeft een deeltje dat beweegt volgens de kromme* **g** *zijn laagste snelheid?*

Als het goed is, dan heb je bij onderdeel a. gezien dat de snelheid bij de kromme **h** *constant is.*

c. *Laat zien dat ook het inproduct* $\dot{\mathbf{h}}(t)\cdot(0,0,1)$ *constant is.*

d. *Laat zien dat de hoek tussen de snelheidsvector* $\dot{\mathbf{h}}(t)$ *en de z-as constant is en bereken die hoek.*

Opgave 8.8. *Bekijk weer de kromme* $\mathbf{k}(t) = (\cos^2(t), \sin(t)\cdot\cos(t), \sin(t))$.

a. *Laat zien dat de snelheidsvector op tijdstip t wordt gegeven door* $\dot{\mathbf{k}}(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), \cos(t))$.

b. *Laat zien dat de snelheid op tijdstip t gelijk is aan* $\sqrt{1+\cos^2(t)}$.

c. *Wat is de minimale snelheid van het deeltje? Waar bevindt het zich dan?*

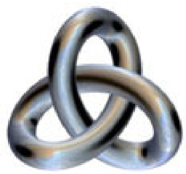
d. *Wat is de maximale snelheid van het deeltje? Waar bevindt het zich dan?*

Opgave 8.9. *Een platte klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{f}(t) = \big((2+\cos(3t))\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t))\cdot\sin(2t)\big)$.
Teken deze knoop eerst op de grafische rekenmachine.

a. *Toon aan dat* $|\mathbf{f}(t)| = 2+\cos(3t)$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{25+16\cos(3t)-5\cos^2(3t)}$.
e. *Wat is de laagste snelheid tijdens het doorlopen van de kromme.*

Opgave 8.10. *Een ruimtelijke klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{g}(t) = \big((2+\cos(3t))\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t))\cdot\sin(2t),\ \sin(3t)\big)$.

a. Toon aan dat $|\mathbf{g}(t)| = \sqrt{5+4\cos(3t)}$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{9+4\cdot(2+\cos(3t))^2}$.
e. *Welke waarden kan de snelheid aannemen?*



Bij twee krommen $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ en $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ kunnen we een inproductfunctie **f·g** definiëren door **f·g** (t) = **f**(t) · **g**(t). De functie **f·g** geeft voor elke t de waarde van het inproduct van de vectoren $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{g}(t)$. Dus $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\ (t) = f_1(t)\cdot g_1(t) + f_2(t)\cdot g_2(t) + f_3(t)\cdot g_3(t)$ of kortweg
$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = f_1\cdot g_1 + f_2\cdot g_2 + f_3\cdot g_3$.

Voorbeeld. Als $\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$ en $\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2-2t)$, dan is
$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\ (t) = 2t\cdot 3 + 4t\cdot 2t + -4t\cdot(t^2-2t) = -4t^3 + 16t^2 + 6t.$

Voor het differentiëren van het inproduct van twee krommen bestaat een regel, die verrassend veel lijkt op de productregel voor gewone functies. Er geldt namelijk: $\dfrac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$ ofwel $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})\dot{} = \dot{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{g}}$.

Het bewijs lijkt veel op dat van de productregel voor gewone functies. $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{\mathrm{d}t}(t)$ is namelijk de limiet van $\frac{1}{\Delta t}\left[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)\right]$ als Δt tot nul nadert. Verder is

$$\frac{1}{\Delta t}\left[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)\right]=\frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\left[(\mathbf{f}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})\cdot\mathbf{g}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})-\mathbf{f}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{g}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}))+(\mathbf{f}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{g}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})-\mathbf{f}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{g}(\mathrm{t}))\right]$$

$$=\left[\frac{(\mathbf{f}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t))}{\Delta t}\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{(\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{g}(t))}{\Delta t}\right].$$

De laatste uitdrukking nadert tot $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}(t)$ als Δt nadert tot nul. Dit geeft het gewenste resultaat.

We kunnen bij twee ruimtekrommen $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)$ en $\mathbf{g}=(g_1,g_2,g_3)$ ook een uitproduct[7] $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ definiëren door $\mathbf{f}\times\mathbf{g}\ (t)=\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)$. De kromme $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ geeft voor elke t het uitproduct van de vectoren $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{g}(t)$. Dus $\mathbf{f}\times\mathbf{g}\ (t)=$

$$(f_2(t)\cdot g_3(t)-f_3(t)\cdot g_2(t)\ ,\ f_3(t)\cdot g_1(t)-f_1(t)\cdot g_3(t), f_1(t)\cdot g_2(t)-f_2(t)\cdot g_1(t))$$

of kortweg: $\mathbf{f}\times\mathbf{g}=(f_2\cdot g_3-f_3\cdot g_2\ ,\ f_3\cdot g_1-f_1\cdot g_3\ ,\ f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_1)$.

Voor het differentiëren van het uitproduct van twee ruimtekrommen bestaat een soortgelijke productregel als voor het differentiëren van het inproduct, namelijk: $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$ ofwel $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})^{\cdot}=\dot{\mathbf{f}}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\dot{\mathbf{g}}$. Het bewijs van de productregel voor het uitproduct is vrijwel hetzelfde als dat van de productregel voor het inproduct.

Opgave 8.11. *Schrijf het bewijs van de productregel voor het uitproduct netjes uit.*

Opgave 8.12. *Een deeltje beweegt over een kromme* $\mathbf{k}$ *gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t)=(\sin t+\cos t,\ \sin t,\ \sin t-\cos t)$.

a. *Toon aan dat* $\mathbf{k}(t)\times\dot{\mathbf{k}}(t)$ *een constante vector is.*

b. *Zeg in woorden wat het resultaat van onderdeel a. betekent.*

[7] Het uitproduct is niet gedefinieerd voor vlakke krommen.

Opgave 8.13. *Een deeltje beweegt over een bol met straal r. Zijn baan wordt beschreven door de kromme* **f**.
Bewijs dat de snelheidsvector van het deeltje steeds loodrecht staat op de straal (ofwel $\mathbf{f}(t) \perp \dot{\mathbf{f}}(t)$ voor elke t).
Hint: ga na dat $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = r^2$ en differentieer deze uitdrukking naar t.

Bekijk een deeltje dat beweegt over de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. We vinden de **versnellingsvector** of kortweg **versnelling** van het deeltje op tijdstip t door de gemiddelde versnelling $\frac{1}{\Delta t}\left(\dot{\mathbf{f}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)\right)$ op een klein tijdsinterval $[t,\ t+\Delta t]$ te berekenen en daarna Δt tot nul te laten naderen. Deze versnellingsvector wordt genoteerd met $\ddot{\mathbf{f}}(t)$ en is gelijk aan: $\left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$.

De functie $\ddot{\mathbf{f}}(t) = \left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$ noemen we de **versnellingskromme** van het deeltje dat beweegt langs de kromme **f**. De grootte van de versnellingsvector wordt ook **versnelling** genoemd (notatie $|\ddot{\mathbf{f}}|$) en wordt gegeven door $|\ddot{\mathbf{f}}|(t) = |\ddot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{\left(f_1''(t)\right)^2 + \left(f_2''(t)\right)^2 + \left(f_3''(t)\right)^2}$. We zullen in een aantal voorbeelden de versnellingsvector nader onderzoeken.

Opgave 8.14. *Bereken zowel de versnellingsvector als de versnelling van de krommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

Opgave 8.15. *Bekijk de kromme* **k,** *die wordt gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t) = (\sin t + \cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$. *Toon aan dat* $\ddot{\mathbf{k}}(t) = -\mathbf{k}(t)$.

Opgave 8.16. *Een deeltje beweegt met constante snelheid over een kromme. Toon aan dat de snelheidsvector loodrecht staat op de versnellingsvector. Hint: kijk nog eens goed naar opgave 8.13.*

In de mechanica is het gebruikelijk om bij een bepaalde kromme de positievector te noteren met $\mathbf{r}(t)$, de snelheidsvector met $\mathbf{v}(t)$ en de versnellingsvector met $\mathbf{a}(t)$. De r staat voor radius (wat voerstraal betekent), de v staat voor velocity (snelheid) en de a voor acceleration (versnelling). Vaak laten we gemakshalve het woord vector weg en hebben we het over de positie $\mathbf{r}(t)$, de snelheid $\mathbf{v}(t)$ en de versnelling $\mathbf{a}(t)$. Aan de notatie is te zien dat er sprake is van een vector en niet van een reëel getal. Het is gebruikelijk om de lengte van een vector aan te geven met dezelfde letter, maar dan niet vet-gedrukt: de afstand tot de oorsprong is $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, de snelheid is $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ en de versnelling is $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$. Deze notatie is bondig en bovendien ondubbelzinnig. Je moet er even aan wennen, maar na enige tijd besef je waarschijnlijk wel de voordelen van deze notatie.

We bekijken een viertal klassen van bijzondere ruimtekrommen.

De eenparig rechtlijnige beweging

Voor $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ beschrijft de kromme $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$ een rechte lijn. Het punt $\mathbf{u}$ is de positie op tijdstip $t = 0$. De snelheid is $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ en de versnelling is $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{o}$. Omdat de snelheid constant is, wordt de lijn eenparig doorlopen.

De eenparig versnelde beweging

Voor reële getallen a, b en c met $a > 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (t, -\frac{1}{2}at^2 + bt + c)$ een bergparabool. De snelheid is $\mathbf{v}(t) = (1, -at + b)$ en de versnelling is $\mathbf{a}(t) = (0, -a)$.

Opgave 8.17. *Laat zien dat voor de eenparig versnelde beweging geldt:* $v(t) = \sqrt{a^2t^2 - 2abt + b^2 + 1}$ *en* $a(t) = a$.

De eenparig cirkelvormige beweging

Voor $r > 0$ en $\omega \neq 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ een cirkel met straal r en hoeksnelheid ω. De snelheid en de versnelling zijn $\mathbf{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$ en $\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)$.

Opgave 8.18. *Laat zien dat voor een eenparig cirkelvormige beweging met hoeksnelheid* ω *over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R geldt:*

a. $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{r}(t)$

b. $v(t) = v = \omega R$

c. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

d. $a(t) = \omega^2 R$

e. $a(t) = v^2 / R$

Door opgave 8.18 vinden we opnieuw (zie V4-materiaal, De wetten van Newton) dat bij een eenparige cirkelbeweging de versnelling gericht is naar het middelpunt en de grootte gelijk is aan v^2/R. Dit werd in 1659 reeds aangetoond door Christiaan Huygens.

De richting en grootte van de versnelling van een eenparige cirkelbeweging kan ook als volgt worden afgeleid:

Opgave 8.19. *Laat* $\mathbf{r}(t)$ *een eenparige beweging zijn met snelheid* v *over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R. De periode van de beweging is T.*

a. *Ga na dat* $\mathbf{v}(t) = \frac{v}{R}\mathbf{r}(t + \frac{1}{4}T)$.

b. *Toon aan dat* $\mathbf{a}(t) = -\frac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)$. *Hint: differentieer de uitdrukking bij a.*

c. *Toon aan dat de versnelling gericht is naar het middelpunt en gelijk is aan* v^2/R.

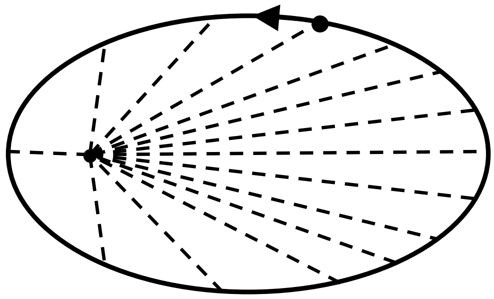
De harmonische beweging

Voor $a \geq b > 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, b\sin\omega t)$ een ellips met halve lange as a en halve korte as b. Deze beweging wordt wel de harmonische beweging genoemd.

Opgave 8.20. *Laat zien dat voor de harmonische beweging geldt:*

a. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

b. $(r(t))^2 + \left(v(t)/\omega\right)^2 = a^2 + b^2$



Stelling 8.1. (De Perkenwet) *Als een beweging* $\mathbf{r}(t)$ *een versnelling* $\mathbf{a}(t)$ *heeft die proportioneel is met* $\mathbf{r}(t)$ *(d.w.z. op elk tijdstip t zijn* $\mathbf{r}(t)$ *en* $\mathbf{a}(t)$ *veelvouden van elkaar), dan geldt het volgende:*

- *De baan van de beweging ligt in een vlak door de oorsprong* $\mathbf{o}$.
- *De oppervlakte van het perk dat per tijdseenheid wordt uitgeveegd door het lijnstuk met eindpunten* $\mathbf{o}$ *en* $\mathbf{r}(t)$ *is constant, met andere woorden, in gelijke tijden worden gelijke perken doorlopen.*

Bewijs. Bekijk de kromme $\mathbf{n}(t)$ gedefinieerd door $\mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$. Dan is $\dot{\mathbf{n}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o}$. De laatste stap geldt, omdat $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{a}(t)$ veelvouden zijn van elkaar. Maar als $\mathbf{n}(t)$ voortdurend snelheid $\mathbf{o}$ heeft, dan moet het een constante vector zijn. Noem deze vector $\mathbf{n}$. Omdat $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ loodrecht staat op $\mathbf{r}(t)$, speelt de beweging zich af in het vlak door de oorsprong met normaalvector $\mathbf{n}$. Dit bewijst het eerste deel van de stelling.

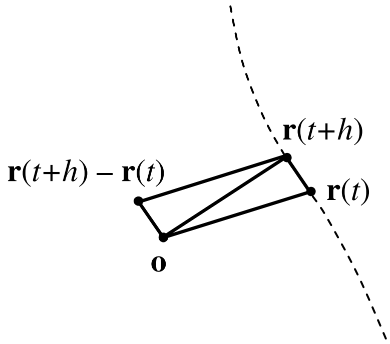
Neem voor t_0 een willekeurige begintijd en laat t een tijdstip zijn later dan t_0. De oppervlakte van het perk dat wordt uitgeveegd door het lijnstuk met eindpunten $\mathbf{o}$ en $\mathbf{r}(s)$ in het tijdsinterval $[t_0, t]$, noemen we $O(t)$. We tonen aan dat $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\right|$.

Welnu, voor een klein positief getal h is: $O'(t) \approx \dfrac{O(t+h) - O(t)}{h} \approx$

$\frac{1}{h} \cdot$ oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\mathbf{o}$, $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{r}(t+h)$ =

$\frac{1}{2h} \cdot$ oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ en

$\mathbf{r}(t)$ = $\frac{1}{2h} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \dfrac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}\right| \approx \frac{1}{2} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\right|$.



Laten we vervolgens h naar nul gaan, dan zien we dat $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t)\right|$. Omdat $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}$ een constante vector is, is $O'(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|$ een constant getal. Maar dan is $O(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|(t-t_0)$ (opgave 8.20). Dus worden in gelijke tijden gelijke perken doorlopen. □

Opgave 8.21. *Laat zien dat voor de oppervlaktefunctie in het bewijs van de Perkenwet geldt:* $O(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|(t-t_0)$.