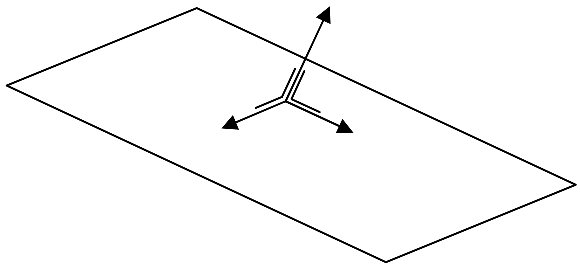
7 Het uitwendig product

Wees niet bezorgd over je moeilijkheden met wiskunde.
Ik kan je verzekeren dat de mijne groter zijn.
Albert Einstein (1879-1955)

In onze Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ hebben we nu en dan behoefte aan een vector, niet de nulvector, die loodrecht staat op twee gegeven vectoren (die niet elkaars veelvoud zijn). Bijvoorbeeld wanneer we een normaalvector zoeken van een gegeven vlak.



Intuïtief is duidelijk dat zo'n vector altijd wel bestaat, maar in de praktijk valt het vaak niet mee om er direct een te vinden. Er moet aan gerekend worden, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

We zoeken een vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ die loodrecht staat op de vectoren $\mathbf{a} = (2, -2, 3)$ en $\mathbf{b} = (3, 4, -5)$.
Voor de gezochte vector **n** moet gelden: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$. Dit houdt in dat: $2n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0$ en $3n_1 + 4n_2 - 5n_3 = 0$. Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden. We gaan eerst één van de onbekenden elimineren, bijvoorbeeld n_1. Door de eerste vergelijking met 3 te vermenigvuldigen en de tweede vergelijking met 2 en daarna het verschil van beide vergelijkingen te nemen, vinden we: $-14n_2 + 19n_3 = 0$. Nu zien we dat we $n_2 = 19$ en $n_3 = 14$ kunnen nemen. Vullen we dit in in de eerste vergelijking, dan krijgen we: $2n_1 - 2 \cdot 19 + 3 \cdot 14 = 0$ ofwel $n_1 = -2$. Dus vinden we $\mathbf{n} = (-2, 19, 14)$. Een controle bevestigt dat $\mathbf{n} = (-2, 19, 14)$ loodrecht staat op de vectoren **a** en **b**. Kun je nog meer vectoren geven die loodrecht staan op zowel **a** als **b**?

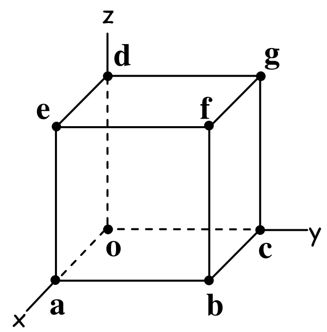
Opgave 7.1. *Bepaal in elk van de volgende gevallen een vector* **n** met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$*, die loodrecht staat op de twee gegeven vectoren.*

a. $\mathbf{a} = (1,3,2)$ en $\mathbf{b} = (1,0,1)$
b. $\mathbf{c} = (0,5,2)$ en $\mathbf{d} = (2,0,-5)$
c. $\mathbf{e} = (4,3,-1)$ en $\mathbf{f} = (1,2,6)$

Opgave 7.2. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg**, *die in een assenstelsel is geplaatst, zoals aangegeven in de onderstaande figuur.*

Bepaal (algebraïsch of meetkundig) van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **abgd**
b. vlak **beg**
c. vlak **acf**



We kunnen het bovenstaande procedé om een vector te vinden, die loodrecht staat op twee gegeven vectoren, ook in het algemeen uitvoeren. Bij twee vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, beide ongelijk aan de nulvector, zoeken we een vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, ook ongelijk aan de nulvector, die loodrecht staat op zowel **u** als **v**. Er moet dan gelden: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Uitgeschreven in coördinaten: $u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0$ en $v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0$. We kiezen er voor om de onbekende n_1 te elimineren. Hiervoor vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met v_1 en de tweede vergelijking met u_1. Dit geeft: $u_1 v_1 \cdot n_1 + u_2 v_1 \cdot n_2 + u_3 v_1 \cdot n_3 = 0$ en $u_1 v_1 \cdot n_1 + u_1 v_2 \cdot n_2 + u_1 v_3 \cdot n_3 = 0$. Nemen we vervolgens het verschil van beide vergelijkingen, dan vinden we:
$(u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot n_2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot n_3 = 0$ ofwel
$(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot n_3 = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_2$.
Dit is een vergelijking waarin de onbekende n_1 niet meer voorkomt. We kunnen nu nemen: $n_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$ en $n_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Vervolgens vullen we de gekozen waarden in in de eerste vergelijking:
$u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$, ofwel

$u_1 \cdot n_1 + u_2 u_3 v_1 - u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1 = 0$, ofwel
$u_1 \cdot n_1 = u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2$, delen door u_1 (!) geeft
$n_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$.

We vinden zo de vector $\mathbf{n} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\, u_3 v_1 - u_1 v_3,\, u_1 v_2 - u_2 v_1)$. Maar in de berekening hierboven hebben we ergens gedeeld door u_1, terwijl dit getal wel eens 0 zou kunnen zijn. Het is echter een eenvoudige opgave om na te gaan dat de zojuist gevonden vector **n** loodrecht staat op de vectoren **u** en **v**, ook in het geval dat $u_1 = 0$.

Opgave 7.3. *Ga met een rechtstreekse berekening na dat de vector* $\mathbf{n} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\, u_3 v_1 - u_1 v_3,\, u_1 v_2 - u_2 v_1)$ *inderdaad loodrecht staat op de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Maar de vector **n** zou wel eens de nulvector kunnen zijn. Dit is inderdaad het geval als **u** en **v** **proportioneel** zijn, d.w.z. veelvouden van elkaar zijn, zoals eenvoudig is na te gaan. Maar of het ook kan gebeuren, als **u** en **v** geen veelvouden van elkaar zijn, vereist een scherpere blik. We stellen de oplossing van dit probleem nog even uit en gebruiken de gevonden uitdrukking als definitie voor het uitwendig product.

Het **uitwendig product** of **uitproduct** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ van de vectoren **u** en **v** wordt gedefinieerd door: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\, u_3 v_1 - u_1 v_3,\, u_1 v_2 - u_2 v_1)$.
Merk op dat het uitproduct van twee vectoren weer een vector in $\mathbb{R}^3$ is, dit in tegenstelling tot het inproduct van twee vectoren, dat een reëel getal is. Het uitproduct heeft een aantal mooie eigenschappen, die we eerst zullen bespreken. Net als het inproduct is ook het uitwendig product bilineair, zodat:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\
&\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\
&(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \times \mathbf{v})
\end{aligned}
$$

In tegenstelling tot het symmetrische inproduct is het uitproduct **antisymmetrisch**, dat wil zeggen: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Hieruit volgt direct dat $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$, met andere woorden het uitproduct van een vector met zichzelf is de nulvector. Immers $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{u})$, dus $2(\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\mathbf{o}$ en dus is $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$.

Ook volgt vrijwel direct dat $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, als **u** en **v** proportioneel zijn. Immers veronderstel dat $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$, dan is $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.

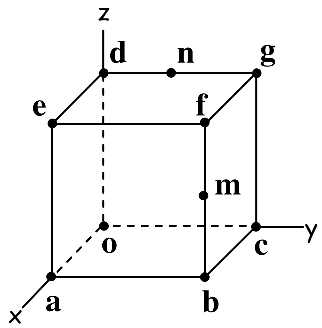
Opgave 7.4. *Controleer door middel van uitschrijven dat:*
a. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$
c. $(\lambda\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

Opgave 7.5. *Bereken voor elk van de drie paren vectoren in opgave 7.1 het uitproduct. Vergelijk de antwoorden met de antwoorden op opgave 7.1.*

Opgave 7.6. *Bekijk weer de kubus* **oabc.defg** *van opgave 7.2. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.

Bereken van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **amc**
b. vlak **amn**
c. vlak **emn**
d. vlak **amg**



Voor inproduct en uitproduct gelden de volgende tripelproductformules.

Stelling 7.1. *Voor* ***u****,* ***v*** *en* ***w*** *gelden de formules:*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Bewijs. Het bewijs is een kwestie van linker- en rechterlid uitschrijven in coördinaten, waarbij $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Bijvoorbeeld voor de eerste formule vinden we:
$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$

En beide uitdrukkingen in het rechterlid zijn inderdaad gelijk. Het bewijs van de tweede formule vergt wat meer schrijfwerk, maar gaat net zo. □

Opgave 7.7. *Bewijs de tweede formule van Stelling 7.1.*

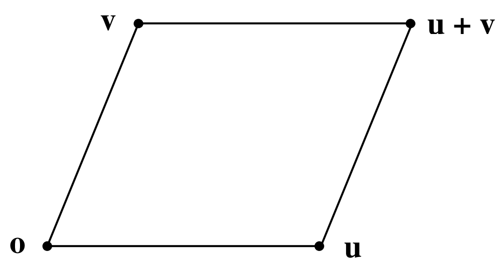
Opgave 7.8. *Bewijs met behulp van de eerste formule van Stelling 7.1. dat* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ *en* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0$*, ofwel* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *staat loodrecht op* **u** *en op* **v.**

Stelling 7.2. *Voor* **u** *en* **v** *(beide* $\neq \mathbf{o}$*) geldt:* $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma$*, waarbij* γ *de hoek is tussen de vectoren* **u** *en* **v.**

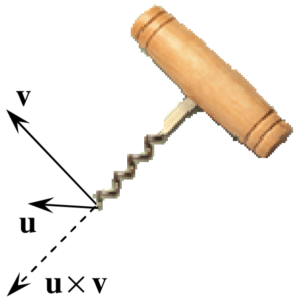
Bewijs. We laten zien dat $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\sin^2\gamma$. Daarbij worden beide formules van Stelling 7.1 gebruikt. Ga bij het lezen van het bewijs precies na, welke formule er bij elke stap wordt toegepast. Bedenk dat de eerste formule van stelling 7.1 ook van rechts naar links kan worden gelezen.

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})) =$$
$$\mathbf{u}\cdot((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) =$$
$$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\gamma)^2 =$$
$$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\cos^2\gamma = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot(1-\cos^2\gamma) = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\sin^2\gamma.$$ □

Een direct gevolg van Stelling 7.2 is dat de lengte van de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram dat wordt opgespannen door de vectoren **u** en **v**, d.w.z. het parallellogram met hoekpunten **o**, **u**, **u+v** en **v** (in die volgorde).



Bekijk nu twee vectoren **u** en **v**, die niet proportioneel zijn. De lengte van de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wordt volledig bepaald door de lengtes van de vectoren **u** en **v** en de hoek tussen deze twee vectoren. Omdat de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ook loodrecht moet staan op zowel **u** als **v**, ligt deze hiermee bijna vast. Er zijn nog twee mogelijkheden voor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, die elkaars tegengestelde zijn. De daadwerkelijke richting van $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wordt ten slotte bepaald door de zogenaamde **kurkentrekkerregel**: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wijst in de richting waarin een kurkentrekker zich verplaatst, wanneer deze van **u** naar **v** wordt gedraaid. Een bewijs van dit laatste feit voert te ver om hier te geven. Samengevat hebben we de volgende meetkundige beschrijving van het uitwendig product.



Stelling 3.3. *Het uitwendig product* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *staat loodrecht op zowel* **u** *als* **v**. *Zijn lengte is gelijk aan de oppervlakte* $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma$ *van het parallellogram, opgespannen door* **u** *en* **v**. *Zijn richting wordt gegeven door de kurkentrekkerregel. Deze meetkundige eigenschappen leggen* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *eenduidig vast.*

Opgave 7.9. *Laat* $\mathbf{x}=(1,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,1,0)$ *en* $\mathbf{z}=(0,0,1)$. *Bereken* $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\times\mathbf{z}$ *en* $\mathbf{x}\times\mathbf{z}$ *en ga na dat hun richtingen overeenstemmen met de kurkentrekkerregel.*

Opgave 7.10. *Bewijs dat als* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, *dan zijn* **u** *en* **v** *proportioneel.*
Hint: Gebruik Stelling 7.2.

Opgave 7.11. *Bewijs dat* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.
Merk op dat je dit op twee manieren aan kunt pakken: linker- en rechterlid uitschrijven in coördinaten (veel schrijfwerk) of gebruik maken van de formules van Stelling 7.1.

Opgave 7.12. *Bewijs dat* $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.
Hint: Gebruik de tweede formule van Stelling 7.1.

Opgave 7.13. *Maak een samenvatting en een formulekaart over de begrippen inproduct en uitproduct in* $\mathbb{R}^3$.