6 Het inwendig product

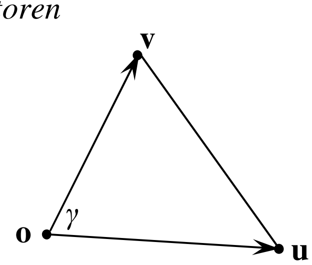
Toen algebra en meetkunde gescheiden vakken waren, was hun voortgang langzaam en hun nut beperkt. Maar sinds beide vakken zijn verenigd, hebben ze elkaar onderling versterkt en zijn ze gezamenlijk opgetrokken naar perfectie.
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Opgave 6.1. De lengte van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ is $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Dit is in te zien door de stelling van Pythagoras twee maal toe te passen in de blokfiguur op pagina 2. De lengte van vector **u** noteren we met |**u**|.

Opgave 6.2. *Bereken in elk van de volgende gevallen de lengtes van de twee genoemde vectoren en de afstand tussen hun eindpunten.*

a. $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (1,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,1)$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (1,2,-1)$

Opgave 6.3. *Gegeven is een driehoek in de ruimte met hoekpunten* **o**, **u** *en* **v**. *De hoek tussen de vectoren* **u** *en* **v** *noemen we* γ. *Hierbij is* $0 \le \gamma \le 180^\circ$.



a. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma = 90^\circ$.
b. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 < |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma > 90^\circ$
en ook dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 > |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma < 90^\circ$.

Opgave 6.4. *Ga in elk van de volgende gevallen na of de hoek tussen de twee genoemde vectoren recht, scherp of stomp is.*

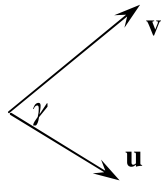
a. $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (1,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,1)$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (1,2,-1)$

Opgave 6.5. *Gegeven zijn de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. *Neem aan dat* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. *De hoek tussen* **u** *en* **v** *noemen we γ. Toon aan dat het volgende geldt:*

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$ *precies dan als* $\gamma = 90^\circ$

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 < 0$ *precies dan als* $\gamma > 90^\circ$

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 > 0$ *precies dan als* $\gamma < 90^\circ$



Uit opgave 6.4 blijkt dat het getal $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ iets zegt over de hoek γ tussen de vectoren **u** en **v**. We schrijven in het vervolg kortweg $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ voor $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ en noemen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ het **inwendig product** of kortweg **inproduct** van de vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^3$. Merk op dat het inproduct $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ geen vector is, maar een reëel getal. Omdat reële getallen ook scalairen genoemd worden, wordt het inproduct ook wel het **scalaire product** genoemd. Terugkijkend vinden we nu de volgende stelling:

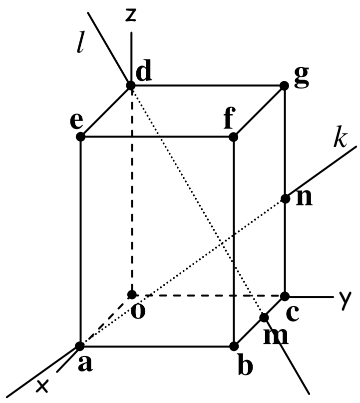
Stelling 6.1. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, *dan geldt het volgende:*
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ *precies dan als* **u** *loodrecht staat op* **v**,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** stomp is,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** scherp is.

Opgave 6.6. *Ga in elk van de gevallen van opgave 6.2 met behulp van het inproduct na of de hoek tussen de twee vectoren recht, scherp of stomp is.*

Beschouw de lijn *k* door het punt **u** die parallel is aan een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Elk punt van de lijn *k* kan worden geschreven als $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (voor zekere λ in $\mathbb{R}$). Omgekeerd ligt elk punt van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ op de lijn *k*. We noemen $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (met λ in $\mathbb{R}$) een **parametervoorstelling** van lijn *k*. De vector **u** wordt een **steunvector** van *k* genoemd en de vector **v** een **richtingsvector**. Het getal λ is de **parameter**.

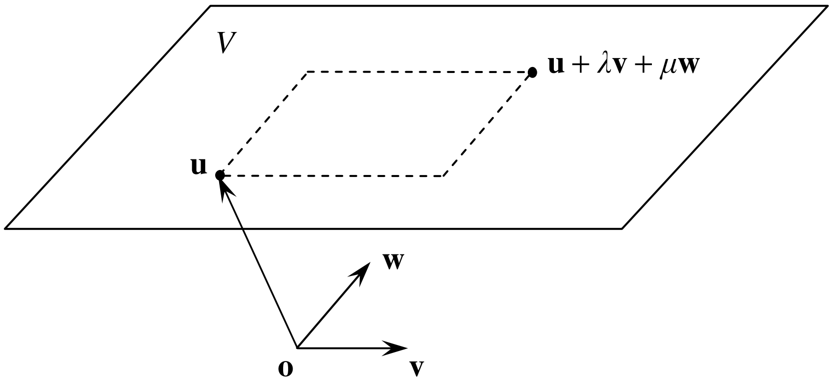
We stellen een parametervoorstelling op van de lijn *m* door de punten **a** = (2, 1, 4) en **b** = (4, 3, 0). Een steunvector van deze lijn is bijvoorbeeld **a** = (2, 1, 4). Een richtingsvector van deze lijn is bijvoorbeeld **b** – **a** = (2, 2, -4). Een parametervoorstelling van lijn *m* is (2, 1, 4) + λ·(2, 2, -4). Maar er zijn veel meer mogelijkheden. Ook (4, 3, 0) + λ·(1, 1, -2) is een parametervoorstelling van *m*. Geef zelf nog enkele andere parametervoorstellingen van *m*.

Opgave 6.7. *De punten* $\mathbf{a} = (3,0,0)$, $\mathbf{c} = (0,4,0)$ *en* $\mathbf{d} = (0,0,6)$ *zijn hoekpunten van een balk* **oabc.defg**. *Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bc** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **cg**. *Lijn k gaat door de punten* **a** *en* **n** *en lijn l gaat door de punten* **d** *en* **m**.

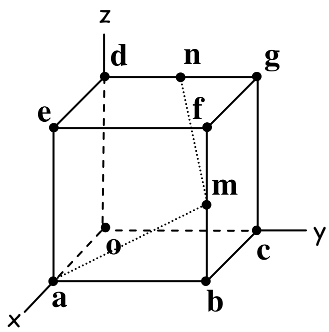


a. Stel parametervoorstellingen op van de lijnen k en l.
b. Ga met een algebraïsche berekening na dat de lijnen k en l elkaar snijden en bereken de coördinaten van hun snijpunt.

Zoals we weten, wordt een vlak in de ruimte bepaald door drie punten, die niet op een lijn liggen. Dit betekent dat een vlak wordt bepaald door één punt in dat vlak en twee richtingsvectoren van dat vlak, die niet proportioneel zijn. Preciezer geformuleerd: elk punt in een vlak *V*, dat gaat door een punt **u**, met niet-proportionele richtingsvectoren **v** en **w,** is van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ voor zekere getallen λ en μ. Omgekeerd ligt elk punt van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ in *V*. Een parametervoorstelling van *V* is $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ (met λ en μ in $\mathbb{R}$). De vector u is een steunvector van vlak *V*.



Opgave 6.8. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.



a. Laat zien dat de lijnen **ac** *en* **db** *loodrecht op elkaar staan.*
b. Is de hoek tussen de lijnstukken **am** en **nm** *scherp, recht of stomp?*

Een punt **p** *ligt zodanig op de z-as, dat lijnstuk* **bp** *loodrecht staat op het vlak door* **a**, **m** *en* **c**.

c. Bereken de coördinaten van punt **p**. *Hint: een lijn staat loodrecht op een vlak, als hij loodrecht staat op twee niet-proportionele richtingsvectoren van dat vlak.*

Het inproduct heeft een aantal mooie eigenschappen. Het inproduct is **symmetrisch**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** geldt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
Het inproduct is ook **bilineair**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** en voor alle reële getallen λ geldt:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$
$$(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$
$$\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

Het bewijs van deze regels gaat door $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3)$ te schrijven en vervolgens linker- en rechterlid uit te schrijven in coördinaten.

Opgave 6.9. *Controleer door middel van uitschrijven dat:*
a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
c. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

Een andere mooie eigenschap van het inproduct is, dat ook de lengte van een vector ermee kan worden berekend. Er geldt namelijk voor elke vector **u** dat $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$ ofwel $|\mathbf{u}|=\sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}$.

Opgave 6.10. *Controleer het bovenstaande door middel van uitschrijven.*

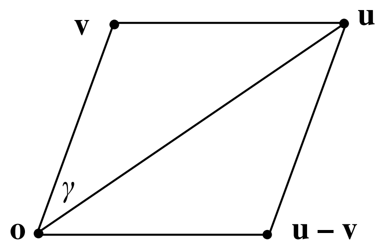
Opgave 6.11. *Gegeven zijn twee vectoren* **u** *en* **v** *in* $\mathbb{R}^3$. *Bewijs met behulp van de regels voor inproducten de volgende formules:*
a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
b. $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$
d. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2$

Opmerking. *Uit opgave 6.11 c volgt dat de diagonalen in een parallellogram loodrecht op elkaar staan, precies dan als het parallellogram een ruit is. Ga dit na. De formule bij onderdeel d staat bekend als de parallellogramwet. Als je van een parallellogram de lengtes van de zijden en de lengte van één van de diagonalen kent, dan kun je met deze formule de lengte van de andere diagonaal berekenen.*

De volgende stelling geeft een antwoord op de vraag naar de meetkundige betekenis van het inwendig product.

Stelling 6.2. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, *dan geldt* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \gamma$, *waarbij* γ *de hoek is tussen* **u** *en* **v**.

Bewijs. We tekenen eerst een geschikt plaatje.



Vervolgens bekijken we de lengtes van de zijden van de driehoek met hoekpunten **o**, **u** en **v**. De afstand van **o** tot **u** is gelijk aan $|\mathbf{u}|$ en de afstand van **o** tot **v** is gelijk aan $|\mathbf{v}|$. De afstand van **u** tot **v** is gelijk aan de afstand van **o** tot **u – v** en die is gelijk aan $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Passen we nu de cosinusregel op deze driehoek, dan vinden we dat: $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \gamma$.

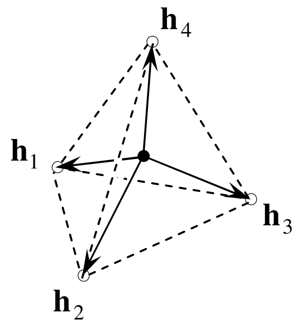
Het linkerlid is volgens opgave 6.11 b gelijk aan: $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$. Dus geldt: $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \gamma$, waaruit de stelling eenvoudig (door schrappen) volgt. □

Opgave 6.12. *Bereken de hoek die de vectoren* $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (4,5,6)$ *met elkaar maken in graden nauwkeurig.*

Opgave 6.13. *Bereken de hoek tussen de lijnstukken* **am** en **nm** *in de kubus van opgave 6.7 in graden nauwkeurig.*

Opgave 6.14. *Leg uit hoe Stelling 6.1 direct volgt uit Stelling 6.2.*

Opgave 6.15. *Een model van het CH_4-molecuul ziet er als volgt uit. Het koolstofatoom zit in het zwaartepunt van een (regelmatige) tetraëder waarbij de waterstofatomen in de hoekpunten zitten. Kies de oorsprong zo, dat deze bij het C-atoom ligt. Noem de vectoren vanuit het C-atoom naar een van de H-atomen respectievelijk* $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ *en* $\mathbf{h}_4$. *De lengtes van de vier vectoren* $|\mathbf{h}_i|$ *zijn gelijk en de zes hoeken tussen* $\mathbf{h}_i$ *en* $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$ *zijn ook gelijk. Omdat het koolstofatoom in het zwaartepunt zit, is* $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4$ *gelijk aan de nulvector.*

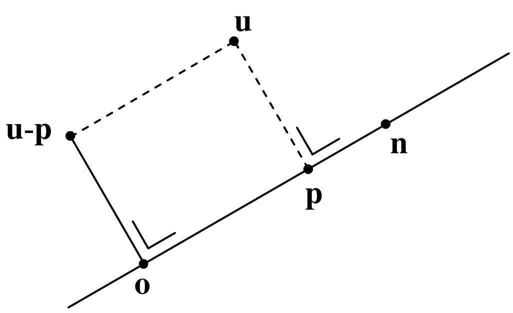


Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen $\mathbf{h}_i$ *en* $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$.
Hint: Bekijk $\mathbf{h}_1 \cdot (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4)$.

Het inproduct is zeer geschikt om de loodrechte projectie **p** van een vector **u** op de drager van een vector **n** (met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$) te berekenen. De drager van **n** is de lijn die precies bestaat uit alle veelvouden van de vector **n**. Dus **p** is een veelvoud van **n**, ofwel $\mathbf{p} = \lambda \cdot \mathbf{n}$ voor een zeker getal λ. We kunnen nu de volgende stelling bewijzen.[4]

Stelling 6.3. *Gegeven zijn een vector* **u** *en een vector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *De loodrechte projectie* **p** *van* **u** *op de drager van* **n** *wordt gegeven door* $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \cdot \mathbf{n}$.

Bewijs. We tekenen weer eerst een geschikt plaatje.



[4] Deze stelling geldt zowel in $\mathbb{R}^2$ als in $\mathbb{R}^3$.

De vector $\mathbf{p}$ is de loodrechte projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{n}$, dus de vector $\mathbf{u}-\mathbf{p}$ staat loodrecht op $\mathbf{n}$. Dus $(\mathbf{u}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0$. Vullen we nu $\mathbf{p}=\lambda\cdot\mathbf{n}$ in, dan vinden we dat $(\mathbf{u}-\lambda\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}=0$. Dus $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}-\lambda\cdot(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0$, ofwel $\lambda=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

De projectievector $\mathbf{p}$ is dus gelijk aan $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. □

Een vector $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$ in $\mathbb{R}^3$ heet een **normaalvector** van een vlak *V*, als $\mathbf{n}$ loodrecht staat op alle richtingen in het vlak *V*.

Opgave 6.16. *Laat U het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 1, 0)$*, dat gaat door de oorsprong* $\mathbf{o}$.

a. *Bepaal het beeld* $\mathbf{p}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij loodrechte projectie op de drager van* $\mathbf{n}$.
b. *Bepaal het beeld* $\mathbf{q}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij loodrechte projectie op vlak U.* *Hint: Ga na dat* $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{u}$ *en maak daar gebruik van.*
c. *Bepaal het beeld* $\mathbf{s}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij spiegeling in vlak U.*

Opgave 6.17. *Laat V het vlak zijn door een punt* $\mathbf{q}$ en *met normaalvector* $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$. *Bewijs dat voor een vector* $\mathbf{v}$ *geldt:*

a. *Als* $\mathbf{v}$ *in vlak V ligt, dan is* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.
b. *Als* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$*, dan ligt* $\mathbf{v}$ *in vlak V.*

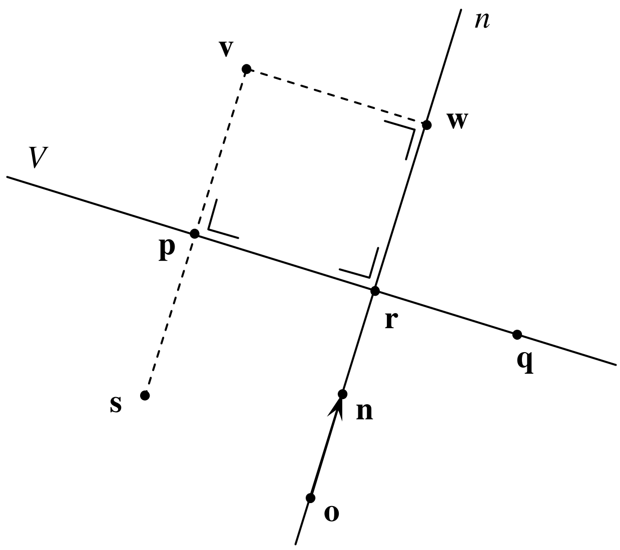
Opgave 6.18. *Laat W het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 2, -1)$*, dat gaat door het punt* $\mathbf{q}=(2, 1, 3)$. *Er zijn reële getallen a, b, c en d zo dat voor een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *geldt:* $\mathbf{v}$ *ligt in vlak W, precies dan als* $av_1+bv_2+cv_3=d$. *Bepaal de getallen a, b, c en d.*

Opgave 6.19. *Laat V het vlak zijn dat gegeven wordt door de vergelijking* $3v_1+2v_2-5v_3=8$*, d.w.z. een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $3v_1+2v_2-5v_3=8$. *Vind vectoren* $\mathbf{q}$ *en* $\mathbf{n}$ *zo dat geldt: een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.

Stelling 6.4. *Laat V het vlak zijn door een punt* $\mathbf{q}$ en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *Laat* $\mathbf{p}$ *de loodrechte projectie van een punt* $\mathbf{v}$ *op vlak V zijn en* $\mathbf{s}$ *het spiegelbeeld van* $\mathbf{v}$ *in vlak V.*

Dan geldt $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ *en* $\mathbf{s} = \mathbf{v} - \frac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

Bewijs. We kijken op een zodanige wijze naar de situatie, dat we het vlak V van opzij zien. Hierdoor zien we V als een lijn. Lijn n is de drager van de normaalvector $\mathbf{n}$. De loodrechte projecties van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{q}$ op lijn n noemen we $\mathbf{w}$ respectievelijk $\mathbf{r}$. Het plaatje ziet er dan zo uit.



Met behulp van stelling 6.3 zien we dat $\mathbf{w} - \mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} - \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. Uit de bilineariteit van het inproduct volgt nu dat $\mathbf{w} - \mathbf{r} = \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

We zien in het plaatje dat $\mathbf{v} - \mathbf{p} = \mathbf{w} - \mathbf{r}$ en dat $\mathbf{v} - \mathbf{s} = 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r})$.

Dus $\mathbf{p} = \mathbf{v} - (\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \frac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$

en $\mathbf{s} = \mathbf{v} - 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \frac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ □

Opgave 6.20. *Laat V het vlak zijn door het punt* $\mathbf{q} = (1, 2, 3)$ *en met normaalvector* $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. *Verder is gegeven het punt* $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.
a. Bereken de coördinaten van de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ *op V.*
b. Bereken de coördinaten van het spiegelbeeld van $\mathbf{v}$ *in V.*
c. Bereken de afstand van punt $\mathbf{v}$ *tot vlak V.*

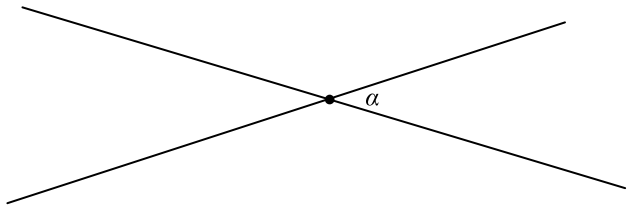
Opgave 6.21. *Laat V het vlak zijn door een punt* $\mathbf{q}$ en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ *en laat* $\mathbf{v}$ *een willekeurig punt in de ruimte zijn.*
Laat zien dat de afstand van punt $\mathbf{v}$ *tot vlak V gelijk is aan* $\dfrac{|(\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

Opgave 6.22. *Laat W het vlak zijn met vergelijking* $3v_1 + 4v_2 - 5v_3 = 20$ *en* $\mathbf{u} = (6, 5, 2)$ *een punt. Bereken de afstand van punt* $\mathbf{u}$ *tot vlak W.*

Opgave 6.23. *Laat V het vlak zijn met vergelijking* $av_1 + bv_2 + cv_3 = d$. *Toon aan dat de afstand van punt* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *tot vlak V gelijk is aan*
$$\frac{|au_1 + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

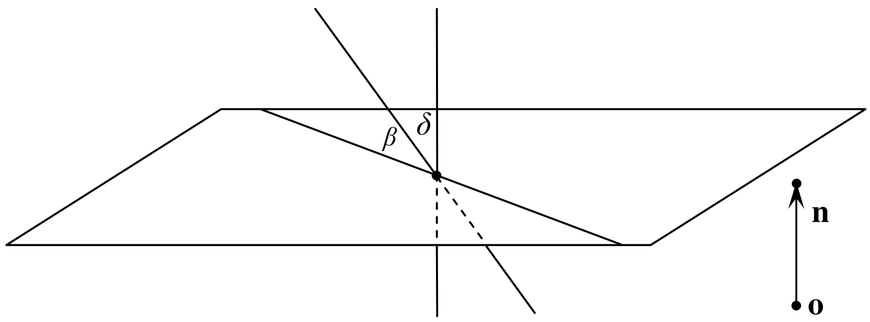
Met behulp van het inproduct kunnen we de hoek tussen twee vectoren berekenen. Met enig nadenken kunnen we hieruit afleiden hoe de hoek tussen twee lijnen, de hoek tussen een lijn en een vlak en de hoek tussen twee vlakken berekend kan worden. We geven de resultaten zonder bewijs. De details worden ingevuld in opgave 6.24 tot en met 6.27.

Bekijk twee snijdende lijnen met richtingsvectoren $\mathbf{v}$ respectievelijk $\mathbf{w}$. Deze lijnen snijden elkaar onder vier hoeken die of alle vier gelijk zijn aan $90°$ of twee aan twee gelijk zijn. Onder de hoek tussen de twee lijnen verstaan we de kleinste van deze vier hoeken. Voor deze hoek α geldt: $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$.
Als de twee lijnen elkaar kruisen, dan kunnen we een van de lijnen zodanig verplaatsen dat deze de andere lijn snijdt. Onder de hoek van de twee lijnen verstaan we dan de hoek tussen de verplaatste lijn en de andere lijn.



Opgave 6.24. *Waarom staat in de formule, waarmee de hoek tussen twee lijnen wordt berekend, het inproduct tussen absolute waarde strepen?*

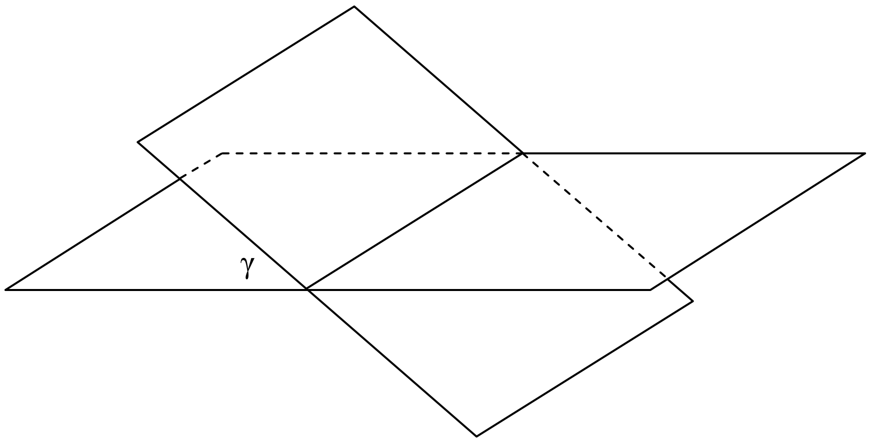
Bekijk een lijn met richtingsvector **v** en een vlak met normaalvector **n**. Tenzij de lijn loodrecht staat op het vlak, verstaan we onder de hoek tussen de lijn en het vlak de hoek tussen de lijn en zijn projectie op het vlak. Voor deze hoek β geldt: $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



Opgave 6.25. *In de figuur hierboven is door het snijpunt van lijn en vlak een lijn getekend met de normaalvector* **n** als richtingsvector. *Leg uit dat voor de hoek δ tussen die twee lijnen geldt:* $\cos\delta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ en dat $\sin\beta = \cos\delta$.

Opgave 6.26. Leg uit dat de formule $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ ook klopt, als de lijn wel loodrecht staat op het vlak.

Bekijk twee niet-evenwijdige vlakken met normaalvectoren **m** respectievelijk **n**. Onder de hoek tussen de twee vlakken verstaan we de kleinste van de hoeken die je ziet als je langs de richting van de snijlijn van de vlakken kijkt. Voor deze hoek γ geldt: $\cos\gamma = \dfrac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



Opgave 6.27. *Leg uit dat de hoek tussen twee snijdende vlakken gelijk is aan de hoek tussen de dragers van de normaalvectoren van die vlakken.*

Opgave 6.28. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.

a. Bereken de afstand van punt **n** *tot vlak* **afc**.
b. Bereken de afstand van punt **m** *tot lijn* **on**.

Bereken in graden nauwkeurig:

c. de hoek tussen de lijnen **an** *en* **md**.
d. de hoek tussen lijn **mn** *en vlak* **afc**.
e. de hoek tussen vlak **abgd** *en vlak* **bcde**.
f. de hoek tussen vlak **afc** *en vlak* **bge**.