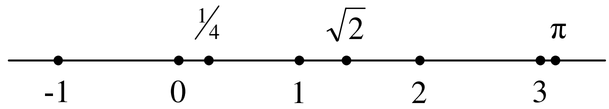
5 Vectoren in de ruimte

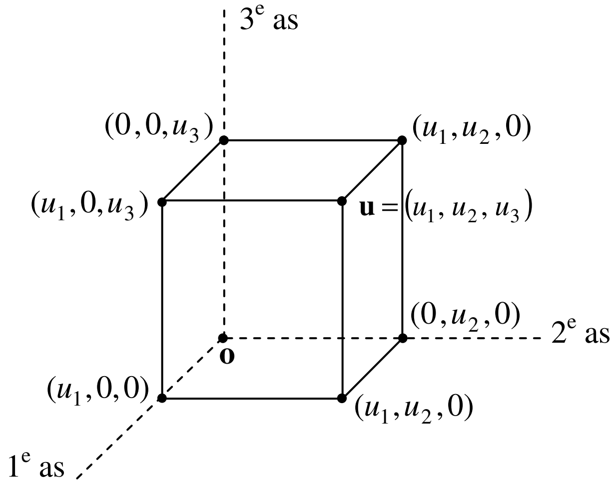
Wiskunde is een taal.
Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

In de eerste drie paragrafen geven we een inleiding in de meetkunde, die door de Griekse wiskundige Euclides in de derde eeuw voor Christus werd beschreven in de Elementen, een dertiendelig verzamelwerk over meetkunde en rekenkunde. Deze meetkunde wordt daarom ook wel Euclidische meetkunde genoemd. De Euclidische meetkunde kan worden onderverdeeld in vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde. Wij zullen ons beperken tot de ruimtemeetkunde, omdat we die vooral nodig zullen hebben. De meeste concepten kunnen echter zonder enige moeite vertaald worden naar de vlakke meetkunde, op het moment dat de behoefte er is. Onze insteek is de moderne manier met coördinaten. Dit heeft als voordeel dat de ruimte direct op een constructieve manier voorhanden is, en bovendien dat naast meetkundig redeneren de algebra een nuttig en efficiënt gereedschap is. Het is absoluut noodzakelijk om deze taal te leren spreken, wil je de wiskunde achter de planeetbanen kunnen begrijpen.
We gaan er van uit dat de getallenlijn, bestaande uit de reëele getallen, bekend is. Hier is een plaatje met $\frac{1}{4} = 0.25$, $\sqrt{2} = 1.41...$, $\pi = 3.14...$ etc.



De collectie van de reëele getallen wordt genoteerd met het symbool $\mathbb{R}$. We kunnen reëele getallen bij elkaar optellen en met elkaar vermenigvuldigen, en de regels daarvoor zijn bekend.
In navolging van de Franse wiskundige René Descartes in zijn Geometria uit 1637 voeren we de Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ in op algebraïsche wijze: $\mathbb{R}^3$ bestaat uit alle drietallen (u_1, u_2, u_3) waarbij u_1, u_2, u_3 reëele getallen zijn.
De Cartesische ruimte kan worden gebruikt om de ruimte, waarin wij ons bevinden, te beschrijven. Dit gaat als volgt. Kies achtereenvolgens drie onderling loodrechte lijnen die door één punt gaan. Het snijpunt van de drie lijnen heet de oorsprong en deze noteren we met **o** (van oorsprong). De drie lijnen zijn de eerste, tweede en derde as (of x-as , y-as en z-as). Voorzie de lijnen van een zelfde schaalverdeling, waarbij in de oorsprong het getal nul

staat. Een willekeurig punt in de ruimte heeft loodrechte projecties op elk van de drie assen. Deze geven de respectievelijke coördinaten van het punt.
Het drietal (u_1, u_2, u_3) noteren we soms kort met **u** en we zien **u** als een punt in de driedimensionale ruimte. Omgekeerd horen bij elk punt **u** in de driedimensionale ruimte drie getallen u_1, u_2 en u_3. Het getal u_1 heet de eerste coördinaat van **u**, u_2 de tweede coördinaat van **u** en u_3 de derde coördinaat van **u**. In $\mathbb{R}^3$ hebben we een uitverkoren punt $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$.
Hieronder is een plaatje getekend van een rechthoekig blok met een hoekpunt $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ en een hoekpunt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. De lengte van het blok is u_1, de breedte is u_2 en de hoogte is u_3, waarbij we aannemen dat deze drie getallen positief zijn.



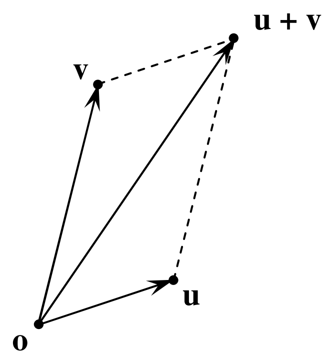
We definiëren in $\mathbb{R}^3$ twee bewerkingen, een optelling en een scalaire vermenigvuldiging. De optelling van twee punten $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ levert een nieuw punt $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ op via de formule $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
De vermenigvuldiging van een punt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ met een reëel getal λ wordt scalaire vermenigvuldiging genoemd (een scalair is een reëel getal) en levert een nieuw punt $\lambda\mathbf{u}$ op via de formule $\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Merk op dat we een Griekse letter gebruikt hebben voor de scalair (het reële getal) en niet een gewone letter. Dit doen we met een reden: op deze manier zijn scalairen (reële getallen) nog beter te onderscheiden van vectoren (die altijd vet worden gedrukt) en dat komt de leesbaarheid ten goede. Er zijn ook andere gangbare manieren om vectoren te noteren. Bijvoorbeeld met een pijl erboven: $\vec{u}$ of met een streep eronder: $\underline{u}$. In handgeschreven stukken verdienen deze schrijfwijzen de voorkeur.

De optelling en de scalaire vermenigvuldiging werken dus coördinaatsgewijs. Deze bewerkingen hebben een aantal mooie eigenschappen, zoals:

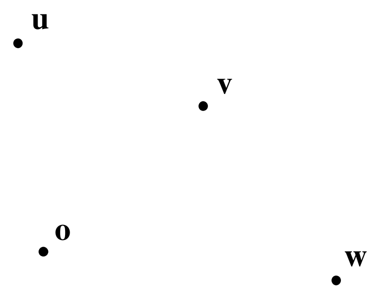
$$\begin{gathered}
\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \\
\mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{u}=\mathbf{u} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
1\mathbf{u}=\mathbf{u} \\
\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u} \\
\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v} \\
(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}
\end{gathered}$$

We spreken daarom soms liever van vectoren dan van punten. Bij een vector denken we aan een pijl (verplaatsing) vanuit de oorsprong naar het bijbehorende punt. We zullen beide opvattingen gebruiken en dus de ene keer spreken over punten en de andere keer over vectoren. Bedenk wel dat vectoren bij ons altijd aangrijpen (starten) in de oorsprong, dit in tegenstelling tot de in andere contexten gebruikte zogenaamde “vrije” vectoren, die in elk punt kunnen aangrijpen. In feite identificeren we een vector met zijn eindpunt. In de praktijk leidt dit niet tot verwarring. De meetkundige betekenis van optellen is zo dat de eindpunten van de vectoren $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}$ (in die volgorde) de hoekpunten vormen van een parallellogram. [1]



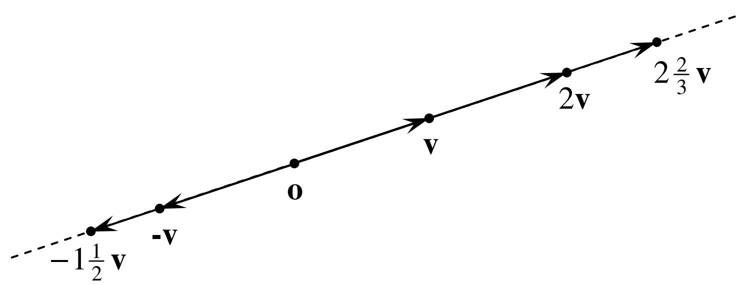
[1] Als $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ op een lijn liggen, dan noemen we het parallellogram ontaard.

Opgave 5.1. *In de figuur hieronder staan de punten* **o, u** *,* **v** *en* **w.** *Het punt* **o** *is de oorsprong. Neem de figuur over en bepaal met de parallellogram-constructie de punten* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ en $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ en ga na dat deze punten samenvallen.



Opgave 5.2. *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk drietal punten* **u**, **v** *en* **w** *ten opzichte van een gekozen oorsprong* **o** *geldt:* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Schrijf hiervoor **u**, **v** *en* **w** uit in coördinaten: $\mathbf{u}=(u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,\, v_2,\, v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1,\, w_2,\, w_3)$.

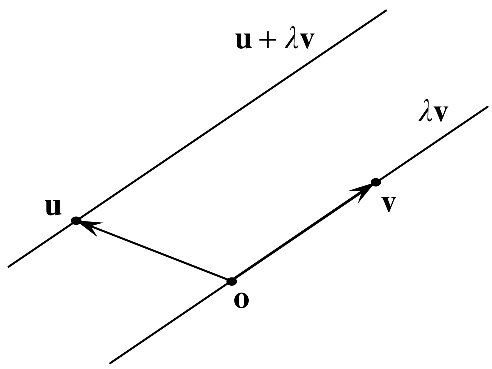
Bij de scalaire vermenigvuldiging van een vector $\mathbf{v}$ met een positief getal λ ontstaat een vector $\lambda\mathbf{v}$, die in dezelfde richting wijst als $\mathbf{v}$ en λ keer zo lang is. Bij vermenigvuldiging met een negatief getal λ is de vector $\lambda\mathbf{v}$ $|\lambda|=-\lambda$ keer zo lang als $\mathbf{v}$, en is zijn richting tegengesteld aan die van $\mathbf{v}$.



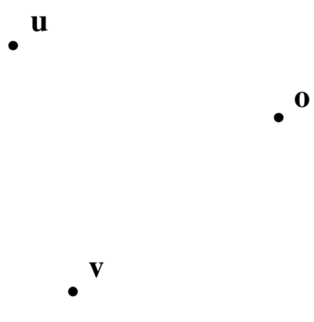
Opgave 5.3. *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk getal* λ *en elk tweetal punten* $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ *ten opzichte van een gekozen oorsprong* $\mathbf{o}$ *geldt:* $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$. Schrijf hiervoor $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$ *weer* uit in coördinaten.

We schrijven meestal $-\mathbf{v}$ in plaats van $-1\mathbf{v}$. En voor $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ schrijven we kortweg $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. De bijbehorende rekenregels doen vertrouwd aan. Zo is $\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}$, $-(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}-(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$.

Is $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, dan vormen alle veelvouden $\lambda\mathbf{v}$ (waarbij λ loopt door $\mathbb{R}$) een lijn, genaamd de **drager** van $\mathbf{v}$. Tellen we bij ieder punt van de lijn $\lambda\mathbf{v}$ een vaste vector $\mathbf{u}$ op, dan krijgen we de lijn $\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$, die door $\mathbf{u}$ gaat en parallel is aan de drager van $\mathbf{v}$.



Opgave 5.4. *Hieronder staan de punten* $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$. *Punt* $\mathbf{o}$ *is de oorsprong. Neem de figuur over en teken de punten* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *en* $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ *erbij.*



Opgave 5.5. *Hieronder staan twee punten* **a** *en* **b**.

a. *Neem de figuur over en kies zelf een plaats voor de oorsprong* **o**. *Zet vervolgens de punten* $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*

b. *Neem de figuur nogmaals over en kies nu een andere plaats voor de oorsprong. Zet vervolgens weer de punten* $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*

c. *Vergelijk de figuren die je bij a. en bij b. hebt gekregen. Valt je iets op?*

d. *Teken in beide figuren ook het punt* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *erbij? Krijg je weer hetzelfde punt?*

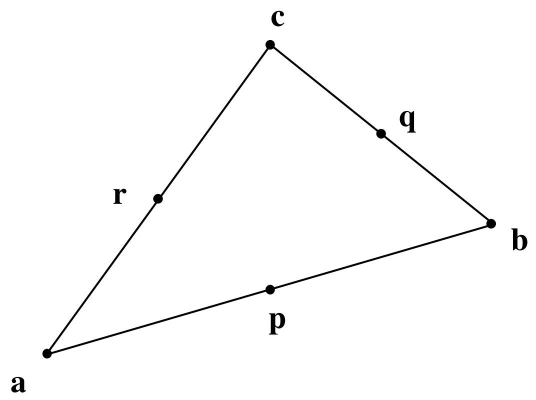
e. *Voor welke getallen* λ *en* μ *zal de plaats van het punt* $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ *niet afhangen van de plaats van de oorsprong? Formuleer een vermoeden.*

f. *Leg uit dat elk punt van de vorm* $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *op de lijn door* **a** *en* **b** *ligt.*

g. *Leg uit dat de plaats van een punt van de vorm* $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *niet afhangt van de plaats van de oorsprong.*

Opgave 5.6. *Gegeven is een driehoek met hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**. *We kiezen een zekere oorsprong* **o** *in het Euclidische vlak*[2] *(alhoewel alles wat we verder in deze opgave opschrijven onafhankelijk is van deze keuze). Het punt dat midden tussen* **a** *en* **b** *ligt is* **p**, *het punt dat midden tussen* **b** *en* **c** *ligt is* **q** *en het punt dat midden tussen* **a** *en* **c** *ligt is* **r**. *Hierna is deze driehoek getekend.*

[2] Of we in het Euclidische vlak (2-dimensionaal) of de Euclidische ruimte (3-dimensionaal) werken, doet niet ter zake.



a. Druk de middens **p**, **q** *en* **r** *uit in de hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**.
b. Druk ook de hoekpunten **a**, **b** *en* **c** *uit in de middens* **p**, **q** *en* **r**. *Hint: Teken de drie middenparallellen.*
c. Toon aan dat het punt $\mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ *ligt op de zwaartelijn*[3] *door* **a**.
d. Toon aan dat de drie zwaartelijnen van de driehoek door één punt gaan. (Dit punt wordt het zwaartepunt van de driehoek genoemd.)

[3] Een zwaartelijn in een driehoek is de lijn door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde.