3 De wetten van Newton

I Cultuurhistorische achtergrond

De Griek Aristoteles (384 v.Chr.-322 v.Chr.) wordt beschouwd als een van de invloedrijkste klassieke filosofen in de westerse traditie. Zijn opvattingen hebben eeuwenlang het denken van de mensen beheerst.

- Zware voorwerpen vallen sneller dan lichte voorwerpen.
- Voor een beweging is blijvend contact van de beweger noodzakelijk
- Elk voorwerp zoekt zijn natuurlijke plaats op (innerlijke drang van het voorwerp)

Deze opvattingen liggen voor de hand. Pas veel later – in de zeventiende eeuw – bleken deze gedachten fout te zijn.

Opgave 1
Leg aan de hand van voorbeelden uit dat de drie opvattingen van Aristoteles (en na hem eeuwenlang de hele mensheid) kloppen met de ervaringen.

Er was heel wat voor nodig om met Aristoteles' opvattingen te breken. In de vijftiende en zestiende eeuw is daar langzaamaan een begin mee gemaakt. Dat gebeurde in het hele westen van Europa. Pas in de 17de eeuw kregen de nieuwe inzichten zijn beslag door Newton. We zetten Aristoteles' opvattingen en die van Newton even tegenover elkaar.

Aristoteles: *de natuurlijke toestand is rust. Elke beweging houdt op zonder ingrijpen van de mens.*
Newton: *er is actie nodig om een beweging te veranderen.*

Opgave 2
Noem een voorbeeld dat Aristoteles mening ondersteunt. Ook een dat voor Newtons opvatting pleit.

Aristoteles: *het zit in de aard van het object of het naar boven gaat of naar beneden.*
Newton: *Massa's trekken elkaar aan.*

Opgave 3
Denk aan een steen die wordt losgelaten en op aarde valt. Aristoteles en Newton bekijken dat gebeuren heel verschillend.
Beschrijf het gebeuren in je eigen woorden zoals Aristoteles het bekijkt en ook hoe Newton het bekijkt.

Je zou kunnen zeggen dat Aristoteles' opvattingen veel beter met de ervaringen overeenstemmen dan Newtons theorie. In de volgende vraag krijg je daarvan nog een staaltje.

Opgave 4
Volgens Newton trekken de aarde en een knikker elkaar aan. Wie trekt het hardst: de knikker aan de aarde of de aarde aan de knikker?

Opgave 5
Je hebt twee ballen, een van 1 kilogram en een van 0,5 kilogram. Je slaat met een knuppel tegen de ene bal en daarna even hard tegen de andere bal. Krijgen de ballen dan dezelfde snelheid?

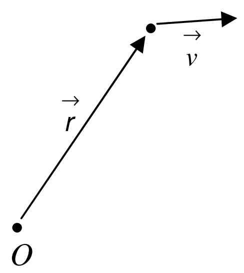
II Bewegingen

In deze paragraaf maakt het niet uit in welke dimensie we werken, in het platte vlak (dimensie 2), in de ruimte (dimensie 3) of zelfs op een lijn (dimensie 1). Een beweging is het gemakkelijks te tekenen in het tweedimensionale vlak, maar de redeneringen en berekeningen gaan letterlijk door in het driedimensionale en eendimensionale geval.
We kiezen een vast punt *O* als oorsprong. Op elk tijdstip t is een bewegende massa op een zekere plaats, heeft zij een zekere snelheid en een zekere versnelling. Dit zijn alledrie vectoren:

$\vec{r}$ = plaatsvector

$\vec{v}$ = snelheidsvector

$\vec{a}$ = versnellingsvector



De lengte van de plaatsvector $|\vec{r}|$ is de afstand tot de oorsprong.

$|\vec{v}|$ is de grootte van de snelheid,

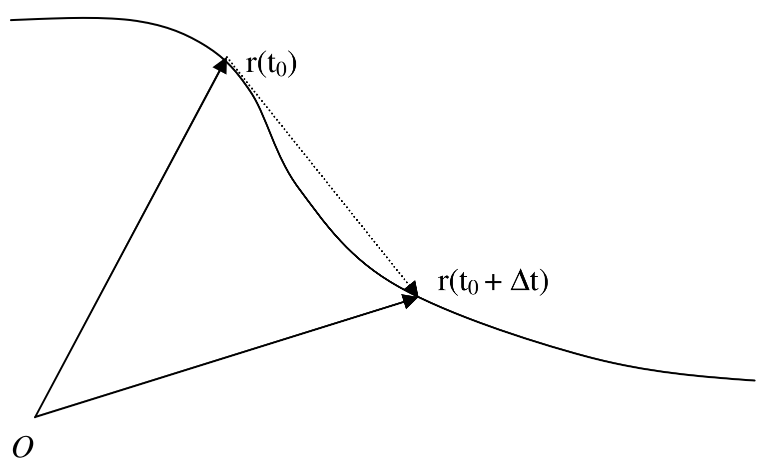
$|\vec{a}|$ is de grootte van de versnelling.

Vaak wordt de naam van een vector bij het eindpunt van de pijl gezet.
De versnellingsvector kan niet handig in beeld gebracht worden.

De richting van $\vec{v}$ geeft aan in welke richting het punt beweegt; de lengte van $\vec{v}$ geeft aan hoe snel het punt beweegt; dit laatste noteren we met $|\vec{v}|$. Je kunt ook zeggen dat $\vec{v}$ je vertelt *hoe* de plaats verandert. Als het punt op een moment langzaam naar rechts beweegt, zal de snelheidvector op dat moment kort zijn en naar rechts wijzen. De snelheidsvector verandert in het algemeen ook in de tijd. Hoe de verandering van richting is en hoe snel die verandering plaatsvindt wordt aangegeven door de versnellingsvector.

De momentane verandering van de plaats is de snelheid:

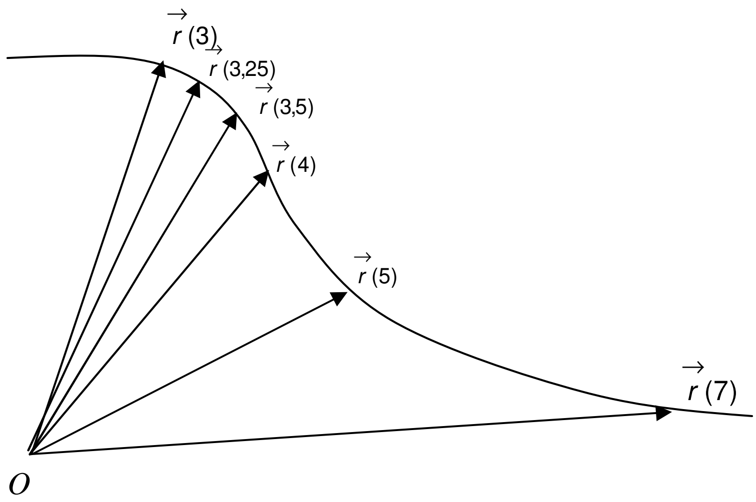
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$$



Opgave 6
Hiernaast is van een bewegend punt de plaatsvector getekend op de tijdstippen 3, 7, 5, 4, 3,5 en 3,25.

Dus $\vec{r}(3)$ en $\vec{r}(3+\Delta t)$ voor Δt = 4, 2, 1, 0,5 en 0,25.

a. Teken $\dfrac{\vec{r}(3+\Delta t)-\vec{r}(3)}{\Delta t}$ voor elk van deze waarden van Δt.



De snelheidsvector (mits niet nulvector) raakt aan de baan.
b. Leg dat uit

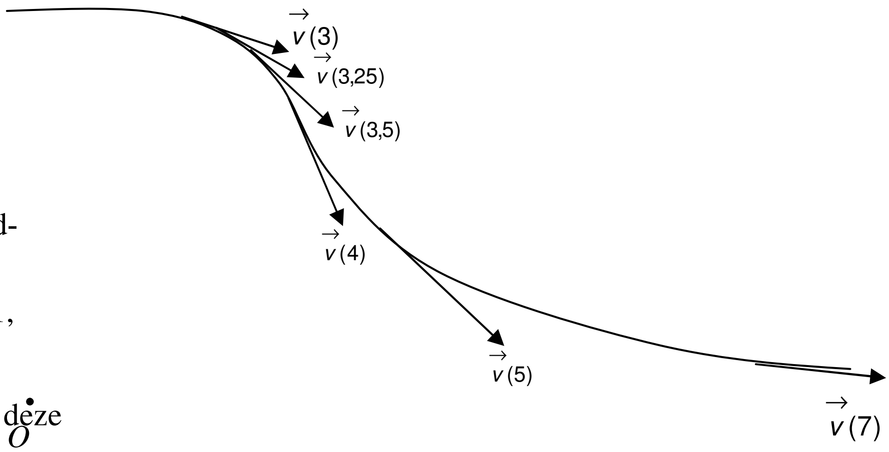
Dat kan ook niet anders: als de snelheidsvector een component heeft die niet in de richting van de baan is, zal de massa de baan verlaten.

De momentane verandering van de snelheid is de versnelling:
$a(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$.

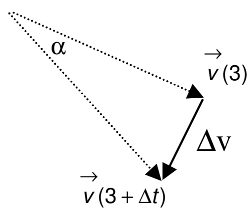
Opgave 7
Hiernaast is van een bewegend punt de snelheisvector getekend op de tijdstippen 3, 7, 5, 4, 3,5 en 3,25.

Dus $\vec{v}(3)$ en $\vec{v}(3+\Delta t)$ voor Δt = 4, 2, 1, 0,5 en 0,25.

a. Teken $\dfrac{\vec{v}(3+\Delta t)-\vec{v}(3)}{\Delta t}$ voor elk van deze waarden van Δt.

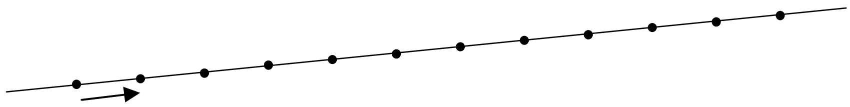


In het algemeen heeft een versnellingsvector een component in de richting van de baan en een loodrecht op de baan.
De component in de richting van de baan veroorzaakt een verandering in de grootte van de snelheid, die loodrecht op de baan veroorzaakt een verandering van de richting.



III Drie bijzondere bewegingen

1. Als de snelheidsvector constant is, beweegt de massa *eenparig rechtlijnig*.



Dan $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$

Opgave Wat is dan de versnellingsvector?

2. Als de versnellingsvector constant is (niet $\vec{0}$), neemt de snelheid in elke seconde met eenzelfde vector $\vec{a}$ toe. Dus dan is $\vec{v} = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}$ en $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + ½ \cdot t^2 \cdot \vec{a}$.
De massa beweegt *eenparig versneld.*

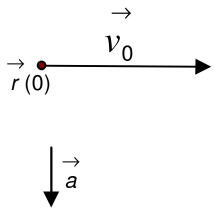
Opgave 8

Hiernaast is een beginstelheid $\vec{v}_0$ en constante versnellingsvector $\vec{a}$ gekozen.

a. Teken de snlheidsvectoren na 1, 2 en 3 seconden.

b. Bereken de plaatsvectoren na 1, 2 en 3 seconden.

c. Schets de baan in het geval van



3. De *eenparige cirkelbeweging*: de massa beweegt zich over een cirkel, zeg met straal R, met constante snelheid *v*.
Deze beweging is het eerst bestudeerd door Robert Hooke (1635 – 1703).

Hooke redeneerde als volgt (1674):
De maan beweegt in een (ongeveer) cirkelvormige baan om de aarde. De maan valt naar de aarde toe in plaats van een rechte baan te volgen. Dus moet er een versnelling zijn. Omdat de snelheid van de maan nagenoeg constant is, moet er een kracht zijn in de richting van de aarde (namelijk loodrecht op de baan). Anders vliegt de maan uit haar baan. Dat noemen we de zwaartekracht.

We nemen het middelpunt van de cirkel als oorsprong. De plaatsvector draait rond in de tijd. De snelheid waarmee hij ronddraait heet ω (in radialen per seconde), de zogenaamde hoeksnelheid.
Er geldt: $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$.
De omwentelingstijd (de tijd nodig voor 1 omwenteling) noemen we T (seconde).

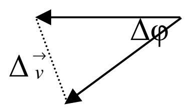
Opgave 9
Stel dat R = 16 (meter) en T = 20 seconden.
a. Bereken v en ω.
Algemeen geldt: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ en $\omega = \dfrac{v}{R}$.
b. Toon dat aan.

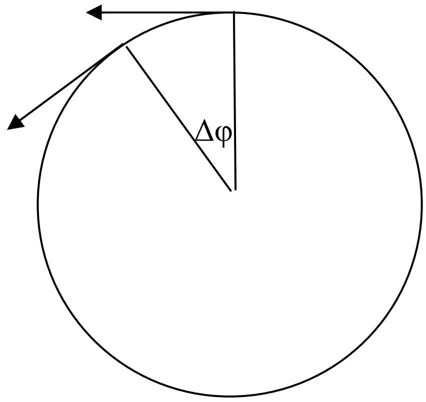
Opgave 10
Als de versnellingsvector een component zou hebben in de richting van de baan, zou de snelheid van de massa toenemen of afnemen. Bij de eenparige cirkelbeweging is da niet het geval.
Hoe is dus de richting van versnellingsvector?

Uit de symmetrie van de cirkelbeweging volgt dat $|\vec{a}|$ constant is.

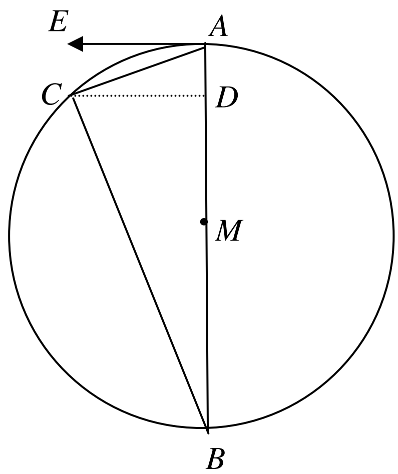
De grootte van de versnelling gaan we afleiden op drie manieren.

Manier 1
$|\vec{a}| \approx |\Delta\vec{v} / \Delta t| = 2\, v \sin\frac{1}{2}\Delta\varphi / \Delta t \approx v \cdot \Delta\varphi / \Delta t = v \cdot \omega = v^2 / R.$





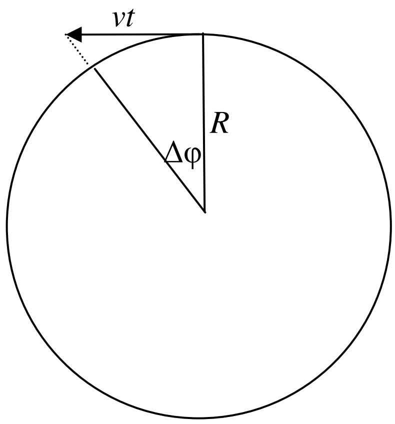
Manier 2
De massa verplaatst zich van A naar C. Dan is er een tangentiële verplaatsing $\vec{AE} = \vec{v} \cdot \Delta t$. en een radiële verplaatsing ½ $\vec{a} \cdot (\Delta t)^2$
Omdat $\angle ACB = 90°$ (Thales), zijn de driehoeken ADC en CDB gelijkvormig.
Er volgt dat $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD}$, dus $CD^2 = AD \cdot BD$.
$(v{\cdot}\Delta t)^2 = ½\, a\, (\Delta t)^2 \cdot (2R - ½\, a\, (\Delta t)^2)$
We doen dit alleen voor kleine waarden van Δt; dan mogen we a constant veronderstellen.
Deel door $(\Delta t)^2$ en laat Δt tot 0 naderen:
$v^2 = ½\, a \cdot 2R$, dus $a = v^2 / R$.



Manier 3

De valweg van de massa in *t* sec. is $\sqrt{R^2+(vt)^2}-R \approx \dfrac{v^2t^2}{2R}$,

Hieruit volgt dat de versnelling is (dmv twee keer differentiëren) : $\dfrac{v^2}{R}$.



Conclusie (Christiaan Huygens)

Bij een eenparige cirkelbeweging is de versnelling $\dfrac{v^2}{R}$,

waarbij v de snelheid is en R de straal van de cirkelbaan.

Opgave 11

Druk de versnelling bij de eenparige cirkelbeweging uit in ω en R.
Tip: v = ωR

Opgave 12

Men spreekt van een geostationaire satelliet als de satelliet steeds op dezelfde plek boven de evenaar hangt.

a. Hoe groot is ω van een geostationaire satelliet?

De versnelling die een satelliet van de zwaartekracht ondervindt is alleen afhankelijk van de hoogte boven het aardoppervlak: $7.54193 \cdot 10^{22} / R^2$ m/s^2 , waarbij R de afstand tot het middelpunt van de aarde is.

b. Bereken R voor een geostationaire satelliet.

De straal van de aarde bij de evenaar is 6378 km.

c. Hoe hoog hangen de geostationaire satellieten boven de evenaar?

Opmerking

Geostationaire satellieten veranderen niet van plaats boven de evenaar. Dit is van groot belang omdat de antenne op aarde dan niet steeds anders gericht hoeft te worden. De meeste satellieten zijn TV-, radio-, communicatie- of weersatellieten. Zoals je in de vorige opgave berekend hebt, bevinden ze zich allemaal op dezelfde hoogte.

IV De wetten van Newton

Wat moeten we verstaan onder *kracht*? *Plaats* is concreet, verplaatsing dus ook. *Tijd* is concreet, verplaatsing per tijdseenheid dus ook, en daarmee *snelheid*. Verandering van snelheid is concreet, dus ook per tijdseenheid, en daarmee *versnelling*. Versnelling kun je rechtstreeks meten.
Bij *kracht* is dat niet mogelijk. Een massa wordt versneld, dat moet door "iets" veroorzaakt worden. Dat "iets" noem je "kracht". Of, een voorwerp wordt vervormd. Dat moet door "iets" veroorzaakt worden. Dat "iets" noem je kracht. Daarmee hebben we een begrip dat het makkelijker maakt om over bewegingsveranderingen en vervormingen te praten.

Newton1

Een massa volhardt in zijn eenparig-rechtlijnige beweging, bij absentie van een inwerkende kracht.
Er is een kracht nodig om de massa te dwingen zijn constante beweging te verlaten.

Opgave 13

a. Zeul een kinderwagen over het strand. Je laat hem los. Hij staat binnen de kortste keren stil.
Welke kracht brengt hem tot stilstand?
b. Sla met je vuist op tafel. Je vuist komt tegen het tafelblad tot stilstand.
Welke kracht brengt je vuist tot stilstand?
c. Je springt op een trampoline. Je gaat omhoog, maar verliest al je snelheid (waarna je terugvalt op de trampoline)
Welke kracht brengt je tot stilstand?

Newton2

De versnelling is evenredig met de kracht en omgekeerd evenredig met de massa.

Opgave
a. Onderwerp een massa vandaag aan een kracht en morgen aan een andere kracht. Morgen versneld de massa 2 keer zo zeer als vandaag.
Wat weet je van de twee krachten, vandaag en morgen?
b. Onderwerp twee massa's elk aan een kracht. De ene massa is 2 keer zo groot als de andere massa. Hun versnellingen zijn gelijk
Wat weet je dan van de twee krachten?

Newton3

actie = -reactie

Opgave 13

a. Leg uit dat de terugslag van een geweer een voorbeeld is van de derde wet van Newton.
b. Leg uit dat raketaandrijving een voorbeeld is van de derde wet van Newton.

Het probleem is dat de gravitatiekracht zo zwak is dat je geen ervaring hiermee hebt. Leg twee kogels naast elkaar op tafel, een van 1 kg en een van 10 kg. Je merkt niets van het feit dat die twee elkaar aantrekken.
Sterker: een knikker boven de aarde trekt even hard aan de aarde, als de aarde aan de knikker trekt. Dat is contra-intuïtief, immers je ziet de knikker naar de aarde toe vallen en niet omgekeerd.

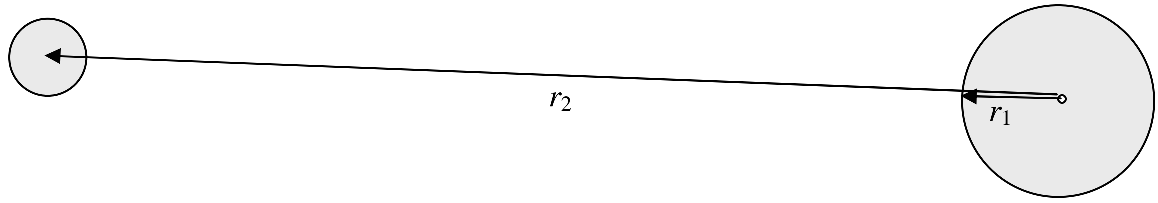
Opgave 14
Hoe komt het dat de knikker naar de aarde toe beweegt en niet omgekeerd?

De kleine bol trekt even hard aan de grote bol als andersom. Je kunt dit op de volgende manier begrijpen. Beschouw de grote bol als 10 kleine bollen aaneengeklonterd. Als de kracht tussen twee kleine bollen (elk behorende tot één van de twee lichamen) F is, dan oefent de grote bol een kracht op de kleine bol uit van totaal 10F. Maar de kleine bol oefent op elk van de 10 bollen waaruit de grote bol bestaat een kracht F uit. In totaal dus ook 10F.

Opgave 15
Een gewicht aan een veer is een illustratie van de derde wet van Newton.
Leg dat uit.

V Gravitatie

Hoe verder een massa zich van de aarde bevindt, hoe zwakker zij door de aarde wordt aangetrokken.
Op het aardoppervlak is de zwaartekrachtsversnelling $g_1 = 9{,}8$ m/s^2; dat is op afstand r_1 = 6371 km van het middelpunt van de aarde.
(Het middelpunt van) de maan bevindt zich op afstand r_2 = 384000 km van het middelpunt van de aarde. De zwaartekrachtsversnelling g_2 die de maan van de aarde ondervindt is dus veel kleiner dan 9,8 m/s^2.
We gaan onderzoeken wat het verband is tussen g_1 en g_2 in relatie tot r_1 en r_2.



Opgave 16
De maan draait in 27,3 dagen om de aarde.
a. Bereken de snelheid van de maan in m/s.

De wet van Huygens luidt: $a = \frac{v^2}{r}$. Hiermee kan de waarde van g_2 worden berekend.
b. Bereken die in m/s^2.
c. Ga na dat ongeveer geldt: $\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$.

Kennelijk is de zwaartekrachtsversnelling *omgekeerd evenredig met het kwadraat* van de afstand.
Bovendien is de zwaartekracht evenredig met de massa's m_1 en m_2 , in dit geval van achtereenvolgens aarde en maan.

Gravitatiewet van Newton

De **gravitatiekracht** die een massa m_2 ondervindt van een massa m_1 is $G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$,
waarbij *r* de onderlinge afstand is van de massa's (preciezer: van de middelpunten van de massa's).

De gebruikte eenheden zijn:
gravitatiekracht in N (=newton)
massa in kg
afstand in m

G is de zogenaamde **gravitatieconstante**. $6{,}67 * 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}. De gravitatiewet is universeel: hij geldt op elke plaats in het heelal en op elk moment. Bovendien geldt de wet op elke schaal: in de microwereld tussen atomen, op aarde en ook in de macrowereld tussen hemellichamen.

Opgave 17
Twee pakken melk van elk 1 kg bevinden zich op 1 m van elkaar.
a. Hoe groot is hun onderlinge aantrekkingskracht.

1 N is (ongeveer) de kracht waarmee de aarde aan een pak melk van 1 kg trekt.
b. Hoe zwaar is de aarde?

Als je een pak melk in je hand houdt, merk je het gewicht: de kracht waarmee de aarde aan het pak trekt. In vraag a heb je berekend dat twee pakken melk op afstand 1 meter elkaar zéér zwak aantrekken. Geen wonder dat je daar in de praktijk niets van merkt.

Opgave 18
Als je twee kogels, een kleine en een grote, van een toren laat vallen, zullen ze gelijktijdig op de grond arriveren.
Leg uit dat dit in overeenstemming is met de Gravitatiewet.

De gravitatiewet is niet alleen van toepassing op kleine voorwerpen, maar ook op gigantische dingen zoals hemellichamen. De aantrekking tussen kleine massa's is verwaarloosbaar klein. Door de aantrekking tussen grote massa's is ons zonnestelsel stabiel: de aarde wordt in een vaste baan om de zon gehouden, de maan in een vaste baan om de aarde.
Als je een bal van een hoogte loslaat, valt hij naar het aardoppervlak. Althans, dat nemen we waar. Volgens de gravitatietheorie van Newton zou de aarde ook naar de bal toe bewegen. Dit gebeurt ook wel, maar in zeer geringe mate. Dit komt omdat de massa van de aarde vele malen groter is dan de massa van de bal.

Opgave 19
Hoe verhoudt zich de versnelling die de bal van de aarde krijgt tot de versnelling die de aarde van de bal krijgt?

Opgave 20
De massa van de aarde is $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg , de straal van de aarde is 6371 km.
De maan is veel lichter en kleiner: haar massa is $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg , en haar straal is 1740 km.
De zwaartekracht op de maan is dan ook veel kleiner dan op aarde.
Hoeveel keer zo klein?

Het was Newtons grote inzicht dat het vallen van een appel naar de grond (als zijn steel van een tak breekt) en het feit dat de maan niet van de aarde wegvliegt, dezelfde oorzaak hebben. Namelijk de gravitatiekracht. Dit inzicht zou Newton (volgens de legende) gekregen hebben terwijl hij onder een boom lag, waaruit een appel viel (1666). Zie bijvoorbeeld
http://nl.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#Anekdote_van_de_appel_en_de_maan

Sir Isaac Newton
1643 – 1727

$G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ is de *grootte* van de kracht die massa m_1 uitoefent op massa m_2 op afstand r van elkaar.

De kracht zelf is de *vector* $-G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12}$, waarbij $\vec{r}_{12}$ de vector is met beginpunt m_1 en eindpunt m_2.

Opgave 21

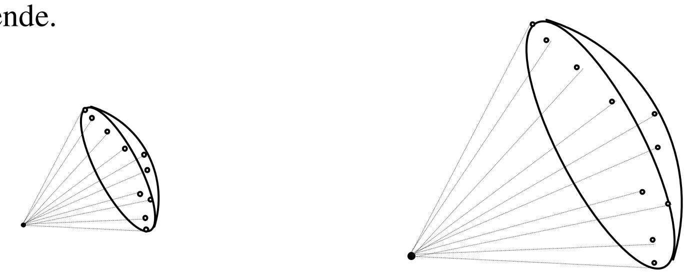
a. Langs welke lijn is de kracht gericht?
b. Wat betekent het minteken?
c. Leg uit dat er in de noemer de *derde*macht van r staat.

Opgave
De straal van de aarde is 6371 km.
Op welke hoogte boven het aardoppervlak is de zwaartekrachtversnelling 4,9 (de helft van de waarde op het aardoppervlak)?

Opmerking

De gravitatiekracht is evenredig met $\frac{1}{r^2}$. De exponent 2 is geen fysische natuurconstante (zoals de lichtsnelheid c, de elektrische lading van een elektron e of de gravitatieconstante G, die experimenteel zijn bepaald). De exponent 2 heeft namelijk direct te maken met het feit dat we in een 3- dimensionale ruimte leven. (Hadden we in een 4-dimensionale ruimte geleefd, dan zou de exponent 3 geweest zijn. De exponent is altijd 1 minder dan de dimensie van de ruimte.)

Dit betekent het volgende.



Bekijk een puntmassa in het midden van een bolschil. Van de bolschil nemen we een "kapje"", waarop een folie massa is aangebracht. Het enige verschil tussen de situaties links en rechts is de afmeting: rechts zijn de afmetingen 2 keer zo groot als links. Maar het folie is bij beide even dik.
De gravitatiekracht die de puntmassa van een mm^2 van het folie ondervindt is rechts dus $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ keer zo groot als links. Maar de oppervlakte van het kapje rechts is 4 keer zo groot als links (*). Dus is de totale gravitatiekracht die de puntmassa rechts ondervindt precies gelijk aan links. Als de exponent niet precies 2 was geweest, zouden de gravitatiekrachten links en rechts ook niet precies gelijk zijn geweest.

(*) Als van een figuur de afmetingen f keer zo groot worden gemaakt, wordt de oppervlakte f^2 keer zo groot en de inhoud f^3 keer zo groot.

Opgave 22

Hoe zit het als de afmetingen rechts 3 keer zo groot zijn als links?

Dat de gravitatiekracht dus evenredig is met $\frac{1}{r^2}$ leiden we op nog een andere manier af.
Hij volgt uit de derde wet van Kepler, tezamen met de wet van Huygens (zie paragraaf 2).
De derde wet van Kepler zegt dat het kwadraat van de omloopstijd van een planeet evenredig is met de derdemacht van de straal van de baan: $T^2 \sim r^3$.
Deze wet van Huygens zegt dat de zwaartekracht die de aarde op de maan uitoefent gelijk moet zijn aan: $m \cdot \frac{v^2}{r}$. (Anders zou de maan op de aarde vallen of uit zijn baan schieten.)

Opgave 23

a,. Leg uit dat v = $\frac{2\pi r}{T}$.

b. Leidt uit a en de derde wet van Kepler af dat zwaartekracht evenredig is met $\frac{1}{r^2}$.

De gravitatieconstante *G* werd door Henry Cavendish als eerste gemeten toen hij de massa van de aarde bepaalde met loden kogels in een torsiebalans. Cavendish vond een waarde van $6{,}6754 \times 10^{-11}$ m^3 s^{-2} kg^{-1}. Inmiddels is de gravitatieconstante op vele verschillende manieren gemeten. Toch blijft de zwaartekrachtsconstante een van de minst nauwkeurig bepaalde fysische grootheden, met maar drie nauwkeurige cijfers.