10 Had Halley gelijk: worden de maanden korter?

Dit is de laatste module. We kunnen nu (eindelijk!) terugkomen op de vraag waar we twee jaar geleden mee begonnen.

Terugblik

In 1695 had de Engelse astronoom Halley berekend dat in de loop van de laatste 800 jaar (vóór 1695) de maanden korter waren geworden. In zijn tijd zou een maand 0,0002 (twee-tienduizendste) uur *korter* hebben geduurd dan aan het eind van de negende eeuw.
Tegenwoordig weten wij echter door lasermetingen dat de afstand tussen aarde en maan toeneemt en daaruit volgt dat de maanden *langer* worden.

Opgave 1

a. Welke wet van Kepler geeft ook al weer het verband tussen omlooptijd van de maan en de afstand tussen aarde en maan, en hoe luidt die wet?
b. Hoe volgt met deze wet uit het groter worden van de afstand maan-aarde dat de maanden langer worden?

Halley en de lasermetingen spreken elkaar dus tegen. Of de maanden langer of korter worden hangt ervan af waarmee je rekent: met zonnedagen of sterrendagen, met zonnemaanden of sterrenmaanden, met sterrenjaren of kalenderjaren[1]!

Opgave 2

Waarschijnlijk concludeerde Halley dat de maanden korter worden uit het feit dat 800 jaar vóór zijn tijd een zekere zonsverduistering niet in Alexandrië, maar in Bagdad had plaatsgevonden.
a. Met welke soort dagen, maanden en jaren zal Halley gerekend hebben?
b. Om welke soort maanden gaat het in de derde wet van Kepler? (zie opgave 40 hoofdstuk 9)

Opgave 3

a. Wat is ook al weer het verband tussen het aantal zonnedagen in een sterrenjaar en het aantal sterrendagen in een sterrenjaar?
b. Wat is ook al weer het verband tussen het aantal zonnemaanden in een sterrenjaar en het aantal sterrenmaanden in een sterrenjaar?

Halley redeneerde (mogelijk) als volgt:
* er passen nu minder zonnedagen in een zonnemaand dan vroeger,
* dus worden de zonnemaanden korter.

Halley ging er daarbij vanuit dat de lengte van de dag tussen 900 en 1700 gelijk was gebleven. Hij hield dus geen rekening met het feit dat de aarde steeds (miniem) langzamer om haar as gaat draaien, waardoor de lengte van de dag (uiterst) langzaam toeneemt.

Opgave 4

Als de zonnemaanden korter worden, worden de sterrenmaanden dat ook. En als de zonnedagen korter worden, worden de sterrendagen dat ook.
Leg dat uit.

1 En welke kalender dan?

We hebben dus twee effecten:

1. de *sterrendag* wordt langer (dat volgt uit de constatering van Halley)
2. de *sterrenmaand* wordt langer (dat blijkt uit lasermetingen).

Opgave 5
Tegenwoordig (eenentwintigste eeuw) duurt een sterrenmaand 27d, 7h, 43m, 11.6s en een sterrendag 23h, 56m, 4s.

a. Stel dat over lange tijd een sterrenmaand 27d, 8h zou duren en de sterrendag 24 uur. Telt een sterrenmaand dan meer of minder sterrendagen dan tegenwoordig?
b. En als een sterrenmaand 27d, 9h zou duren en de sterrendag 24 uur?

Of de sterrenmaand, gemeten in sterrendagen, langer wordt, hangt er dus maar vanaf. Om dat te weten te komen, moeten we weten *hoe snel* de sterrenmaanden langer worden en *hoe snel* de sterrendagen langer worden.

Getijdenwerking

We gaan nu eerst uitzoeken hoe het komt dat de aarde langzamer om haar as gaat draaien. Dit blijkt – verrassend? - juist door de maan te komen!

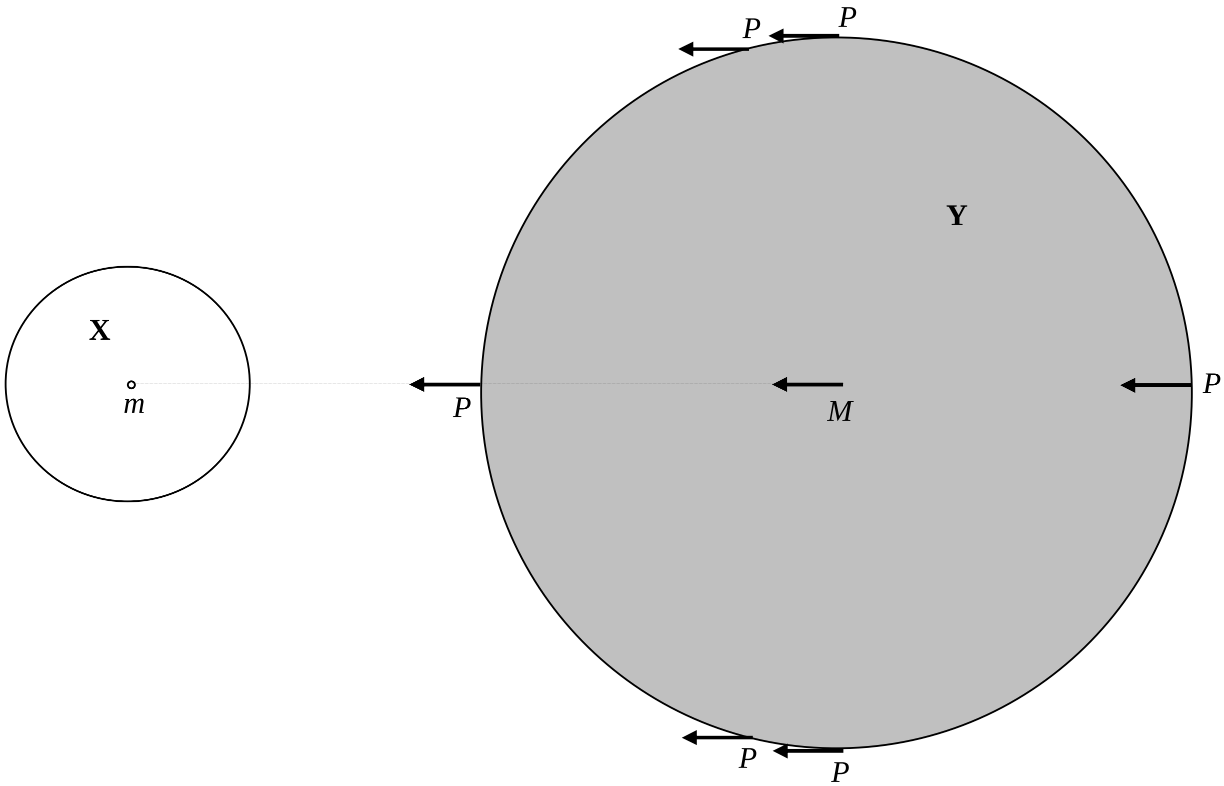
We bekijken weer een dubbelplaneet, net als in het vorige hoofdstuk.
m is het middelpunt van de ene planeet X, m is ook de massa van die planeet, M is het middelpunt van de andere planeet Y, d is de afstand van m tot M. In de tekening is d 10 cm.
We beschouwen 1 kg op plekken P op afstand a van m.
1. als plek P op M ligt, ondervindt de kg ten gevolge van de zwaartekracht van X een versnelling Gm/d^2, evenwijdig aan de lijn Mm.
We willen de versnelling op andere plekken P op of in Y vergelijken met deze versnelling op plek M. We hebben in de figuur op de volgende bladzijde zes plekken P gekozen en daar alvast de versnelling die op plek M geldt met een pijl van lengte 1 cm aangegeven.
2. De zwaartekracht van X geeft 1 kg op een plek P een versnelling Gm/a^2, langs de lijn Pm.

Opgave 6

a. Geef op de zes plekken P de versnelling Gm/a^2 aan met een pijl (op dezelfde schaal als de pijl in het middelpunt van de aarde).

Op de plekken P zijn nu twee pijlen getekend, elk een versnelling aangevend. De aantrekkingskracht van X is niet op alle plekken van Y even groot. Dat heeft tot gevolg dat Y wordt vervormd. De verschilvectoren geven aan hoe sterk en in welke richting de vervorming is.

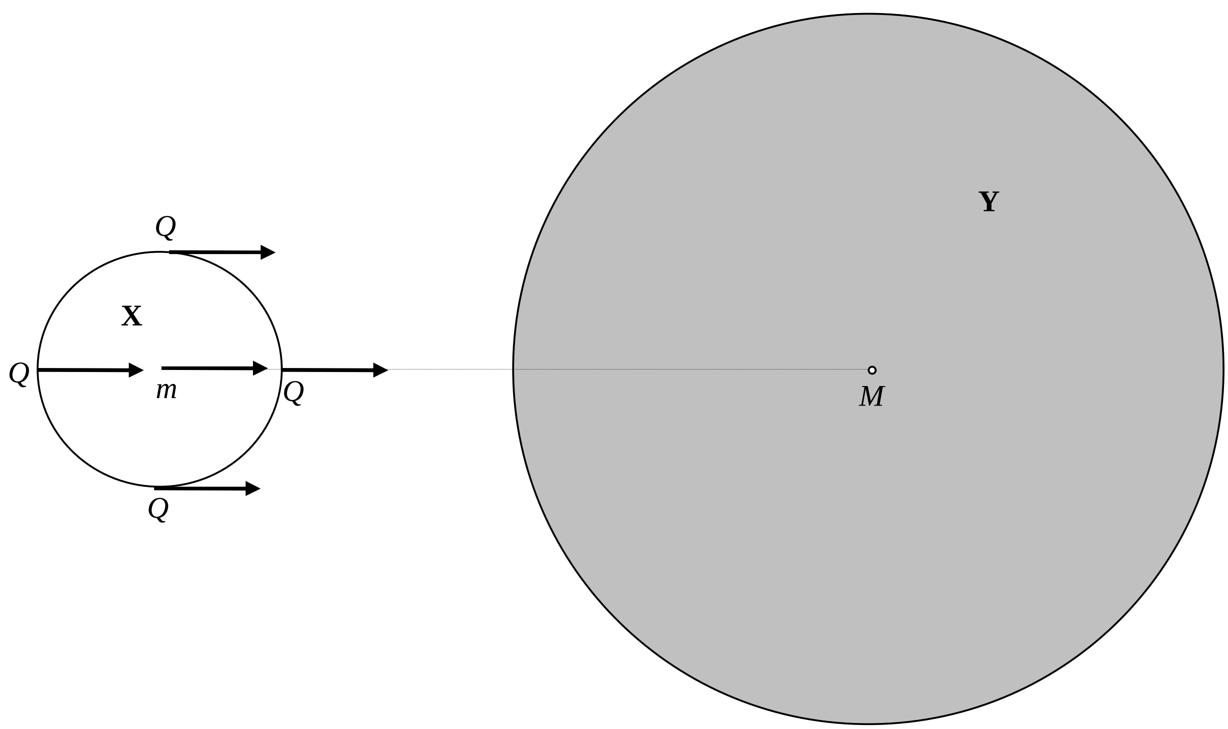
b. Teken die verschilvectoren.



We gaan hetzelfde doen, met de rollen van X en Y verwisseld. De versnelling die 1 kg van X ondervindt door aantrekking van Y, hangt weer af van de plek waar die kg zich bevindt. We geven de versnelling die een kg op plek *m* ondervindt aan met een pijl van lengte 2 cm (als X de maan is en Y de aarde, zou die pijl wel 100 keer zo lang moeten zijn als in de figuur hierboven; om het tekenbaar te houden hebben we voor 1,5 cm gekozen).

Opgave 7

Doe nu hetzelfde hieronder voor de vier punten *Q* op X)zie onderstaande figuur onder invloed van de zwaartekracht van Y.



Conclusie: beide planeten worden uitgerekt door de onderlinge aantrekkingskracht.

We gaan dit nu toepassen op het aarde-maan-systeem, en met de werkelijke waarden rekenen.

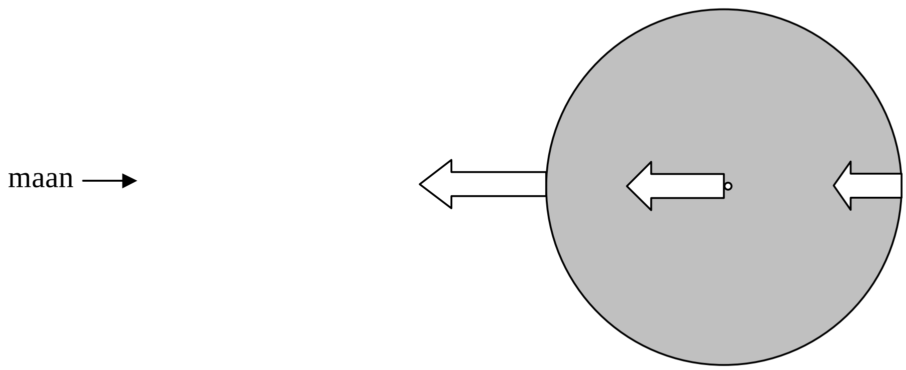
graviatieformule: $F_z = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
gravitatieconstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
Er geldt:
$m = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
d = 384.450 km (gemiddeld)
straal aarde = 6378 km (gemiddeld)

Opgave 8

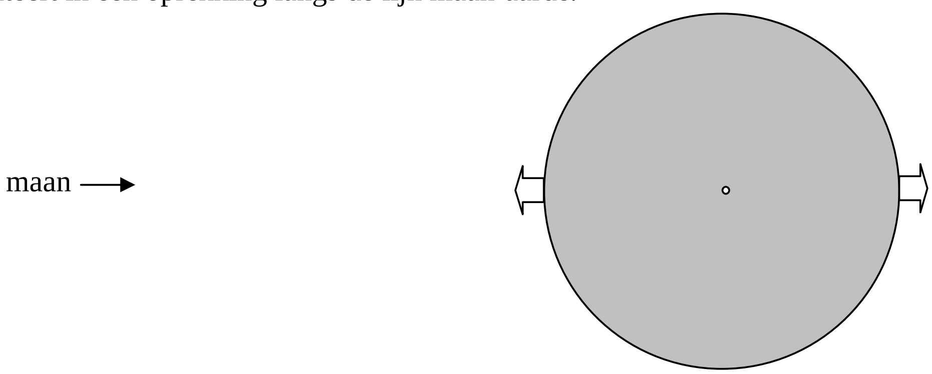
a. Wat is de kracht per kilogram, dwz de versnelling, waarmee het middelpunt van de aarde door de maan wordt aangetrokken?
b. Zelfde vraag voor de plek van de aarde aan de kant van de maan.
   En ook op de plek aan de andere kant van de aarde (zo ver mogelijk van de maan).

Samenvatting

De plek op aarde aan de kant van de maan wordt iets harder versneld richting maan dan het middelpunt van de aarde, en de plek aan de andere kant wordt iets minder hard versneld. Dat is hieronder in beeld gebracht. De linker pijl is in werkelijkheid maar 3% langer dan de middelste, maar is ter wille van de duidelijkheid 30% langer getekend. De rechter pijl is in werkelijkheid maar 3% korter dan de middelste, maar is 30% korter getekend.



De maan trekt niet even hard aan elke kg van de aarde. In plaats van de versnellingen zelf, bekijken we de verschillen met de versnelling van het middelpunt van de aarde: dit zijn de “rekversnellingen”. Dit resulteert in een oprekking langs de lijn maan-aarde.



Opgave 9
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, straal maan = 1738 km.
Zijn de rekversnellingen die op de maan werken groter of kleiner dan bij de aarde?

De vervorming van de vaste massa van de aarde is erg gering; aan de evenaar in de orde van een halve meter. Waar we echter veel meer van merken is de vervorming van de watermantel om de aarde: de zeegetijden. Dit komt omdat water veel minder star is dan (eventueel vloeibaar) gesteente, en ook rond de aarde kan bewegen.

Conclusie: Er zijn getijdenbergen en -dalen aan *twee* kanten van de aarde.
Overigens speelt stroming een grote rol en daarmee ook de plaats en vorm van de landmassa's.

Koppel

Nu staan aarde en maan niet stil ten opzichte van elkaar, maar draaien om elkaar heen (net zoals alle dubbelplaneten trouwens).

Opgave 10
Leg uit dat dit geen gevolg heeft voor de versnellingen zoals hierboven uitgerekend.

Als de maan niet om de aarde zou draaien, zou de tijdsduur tussen twee opvolgende keren vloed precies ½ sterrendag, dat is 11,967 uur, zijn.
De maan draait in 27,3 dagen om de aarde, in dezelfde richting als waarin de aarde om haar as draait.

Opgave 11
Laat door een berekening zien dat de (gemiddelde) tijd tussen twee opvolgende keren vloed 12 uur en 25 minuten is.

Doordat het stromen van het water rond de aarde bij eb en vloed, en meer algemeen het vervormen van dubbelplaneten, niet wrijvingsloos gaat, is het niet vanzelfsprekend dat op een punt op de aarde vloed optreedt precies als de maan boven dat punt staat. Dat is dan ook niet zo. We bekijken hier in ons model de voornaamste reden hiervoor – de reden die we uiteindelijk ook nodig hebben om Halley's probleem op te lossen.

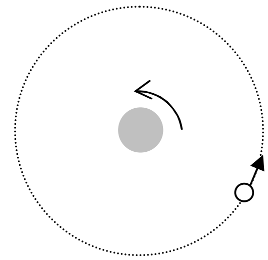
Beschouw dus weer een dubbelplaneet, met een (snel) ronddraaiende Y. Dan draaien, grofweg gezegd, de vloedbergen onder X vandaan. Maar die weggedraaide vloedbergen worden weer door X aangetrokken. Wat er precies gebeurt hangt af van de onderlinge grootte van de verschillende krachten en de draaisnelheid van Y, maar altijd is het resultaat een evenwichtstoestand, waar de vloedbergen permanent in meer of mindere mate op de lijn *Mm* voor- of achterlopen.[2]

Opgave 12
a. Teken in een plaatje van ieder geval een voorbeeld.

Het kan ook gebeuren dat de ebdalen precies in lijn liggen met *mM*.
b. Teken ook dit in een plaatje.

2 Voor een veel diepgaander analyse, zie http://faculty.ifmo.ru/butikov/Projects/tides1.pdf

Hoe zit dat in het geval aarde – maan? De aarde draait naar het oosten en dus (van boven gezien) linksom. De maan draait ook linksom.



Opgave 13
a. Welke hoeksnelheid is het grootst, die van de draaiing van de aarde om haar as of die van de maan om de aarde?
b. Loopt de vloedberg voor of achter op de lijn aarde-maan?

De maan oefent aantrekkingskrachten uit op beide vloedbergen; die zijn verschillend van richting en ook van grootte.

Opgave 14
a. Op welke van de twee vloedbergen is de aantrekkingskracht het grootst?

Er ontstaat dus een koppel tov het middelpunt van de aarde.
b. In welke richting werkt de resulterende kracht, in de draairichting van de aarde of juist tegengesteld daaraan?
c. Welk effect heeft dit op het impulsmoment van de draaiende aarde?

De maan heeft steeds dezelfde kant naar de aarde toegekeerd, de zogenaamde "tidal locking".

Opgave 15
Werkt er ook een koppel op de maan?

Opgave 16
a. Bereken het traagheidsmoment van de maan en van de aarde: I_{maan} en I_{aarde}. Zie opgave 35 van hoofdstuk 9.
b. Ga na dat het impulsmoment van de maan zeer klein is ten opzichte van het impulsmoment van de aarde.

Opgave 17
Leg uit dat (vanwege de tidal locking) het impulsmoment van de maan alleen maar kan veranderen als de hoeksnelheid van draaiing van de maan om de aarde verandert.

In hoofdstuk 9 stelling 7 hebben we gezien dat $\vec{L}_{tot} = I_{aarde}\,\vec{\omega}_{aarde} + I_{maan}\,\vec{\omega}_{maan} + \mu\, d^2\, \vec{\omega}$.
Omdat het draaiimpulsmoment van de maan zo klein is vergeleken met dat van de aarde en dat van aarde-maan, en omdat het meeverandert met het tweede, zullen we het in het vervolg verwaarlozen.
Omdat $\vec{\omega}_{aarde}$ en $\vec{\omega}$ ongeveer gelijk gericht zijn (waarom is dat zo?), kunnen we zeggen dat de grootte van het totale impulsmoment van het aarde-maan-systeem L_{tot} gelijk is aan $I_{aarde} \cdot \omega_{aarde} + \mu\, d^2\, \omega$.

Opmerking
Zoals bewegingsenergie bij wrijving wordt omgezet in warmte, zou je kunnen denken dat er draaiimpuls-moment door de waterbewegingen "verdwijnt". Maar dat is niet het geval; draaiimpuls blijft altijd behouden.

Opgave 18

De derde wet van Kepler zegt dat $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{Gm}$.

a. Leid hieruit af dat $\omega = \sqrt{Gm}\, d^{-1,5}$.

b. Ga na dat dit ingevuld in de formule van het impulsmoment geeft:
$L_{tot} = I_{aarde}\ \omega_{aarde} + \mu \sqrt{Gm} \sqrt{d}$.

De dag wordt langer en de maand wordt langer

We moeten nu de twee effecten, van het langer worden van de dag en van het langer worden van de maand, gaan kwantificeren, dwz. we moeten vergelijkingen opstellen en getallen invullen, om uit te rekenen welk effect de overhand heeft. We hebben het hier over de lengtes van dag en maand zoals die op aarde ervaren worden.
De lengte van de zonnedag noemen we λ_{dag}, de lengte van de zonnemaand noemen we λ_{maand}. In welke eenheid we die meten (in seconde, in uur, of nog iets anders) doet er niet toe, want we gaat letten op het quotiënt $\lambda_{maand} : \lambda_{dag}$.

Opgave 19

Of de maanden (gemeten in (zonne)dagen) korter of langer worden, kunnen we zien aan $\frac{\lambda_{maand}}{\lambda_{dag}}$.

a. Leg dat uit.

We bekijken λ_{maand} en λ_{dag} beide als functie van de afstand *d* van aarde en maan.
In het vervolg geeft het accent aan dat we differentiëren naar *d*.

b. Wat weet je van $\left(\frac{\lambda_{maand}}{\lambda_{dag}}\right)'$ als de maanden korter worden?

c. Leid hieruit af (gebruik de quotiëntregel voor differentiëren) dat, als de maanden korter worden, geldt: $\frac{\lambda_{maand}'}{\lambda_{dag}'} \cdot \frac{\lambda_{dag}}{\lambda_{maand}} < 1$.

Opgave 20

λ_{jaar} is de duur van een jaar, dat is de tijd waarna aarde – zon weer dezelfde positie heeft ten opzichte van de vaste sterren.
In de tijdsduur λ_{dag} draait de aarde om haar as (ten opzichte van de zon).

a. Leg uit dat $\omega_{aarde} = 2\pi \left(\frac{\lambda_{jaar}}{\lambda_{dag}} + 1\right) / \lambda_{jaar}$.

b. Leg uit dat $\omega_{aarde} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_{dag}} + \frac{1}{\lambda_{jaar}}\right)$.

Net zo vind je voor de hoeksnelheid ω van de draaiing van de dubbelplaneet aarde-maan om de zon: $\omega = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_{maand}} + \frac{1}{\lambda_{jaar}}\right)$.

We gaan nu de vier formules van opgave 18a, 18b, 21b en 21c combineren.

Opgave 21
Zoals opgemerkt wordt ω_{aarde} kleiner, omdat *d* toeneemt en het impulsmoment gelijk moet blijven.

a. Leid uit de formule in opgave 20b af wat er bijgevolg gebeurt met λ_{dag}, wordt die groter of kleiner?
b. Leid vervolgens uit de formule in opgave 18a af wat er gebeurt met ω.
c. Leid vervolgens uit de formule na opgave 20b af wat er gebeurt met λ_{maand}.

Opgave 22
Merk op dat λ_{jaar} niet van *d* afhangt.

a. Ga na dat $\omega' = 2\pi \dfrac{-\lambda_{\text{maand}}'}{\lambda_{\text{maand}}^2}$ en $\omega_{\text{aarde}}' = 2\pi \dfrac{-\lambda_{\text{dag}}'}{\lambda_{\text{dag}}^2}$.

b. Ga na dat $\dfrac{\omega'}{\omega_{aarde}'} = \dfrac{\lambda_{\text{maand}}'}{\lambda_{\text{dag}}'} \cdot \dfrac{\lambda_{\text{dag}}^2}{\lambda_{\text{maand}}^2}$.

Opgave 23
a. Ga na dat uit opgave 18a volgt: $\omega' = -1{,}5\sqrt{Gm}\, d^{-2{,}5}$.

b. Ga na dat uit opgave 18b volgt: $\omega_{\text{aarde}}' = -\dfrac{\mu\sqrt{Gm}}{2I_{\text{aarde}}\sqrt{d}}$. (differentieer naar *d*)

c. Ga na dat uit a. en b. volgt: $\dfrac{\omega'}{\omega_{\text{aarde}}'} = \dfrac{3I_{\text{aarde}}}{\mu d^2}$.

Opgave 24
Controleer zorgvuldig de volgende redenering; zoek bij elke stap de opgave waarop deze gebaseerd is.

De maanden worden korter $\Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda_{\text{maand}}'}{\lambda_{\text{dag}}'} \cdot \frac{\lambda_{\text{dag}}}{\lambda_{\text{maand}}} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda_{\text{maand}}'}{\lambda_{\text{dag}}'} \cdot \frac{\lambda_{\text{dag}}^2}{\lambda_{\text{maand}}^2} < \frac{\lambda_{\text{dag}}}{\lambda_{\text{maand}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega'}{\omega_{aarde}'} < \frac{\lambda_{\text{dag}}}{\lambda_{\text{maand}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3I_{\text{aarde}}}{\mu d^2} < \frac{\lambda_{\text{dag}}}{\lambda_{\text{maand}}}$$

Opgave 25

We kunnen controleren of de ongelijkheid $\frac{3I_{\text{aarde}}}{\mu\, d^2} < \frac{\lambda_{\text{dag}}}{\lambda_{\text{maand}}}$ waar is, want we kennen alle waardes van de constanten in die ongelijkheid.

I_{aarde} ; zie opgave 16a.

d = 384000 km

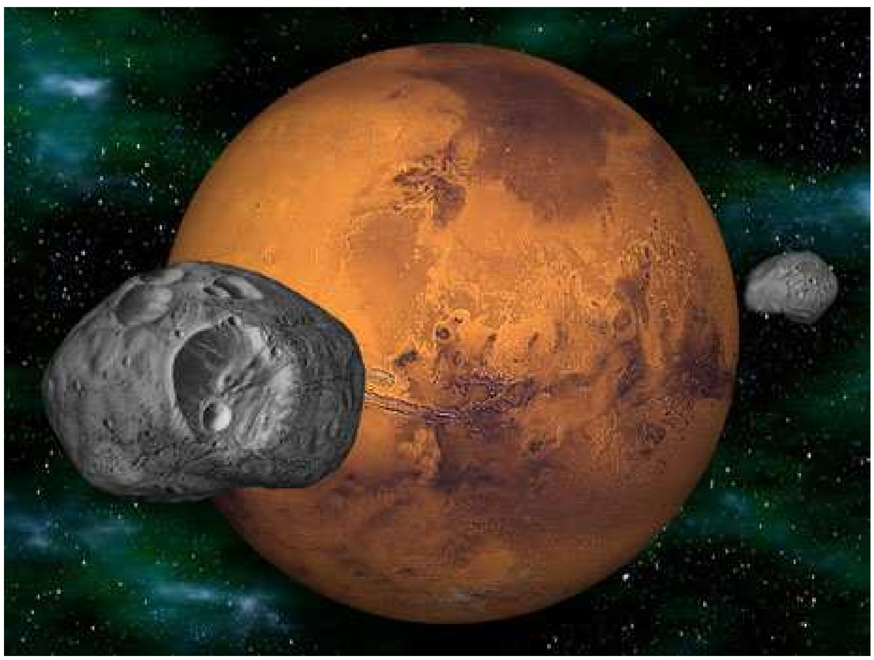
$\mu = \frac{m_{\text{aarde}} \cdot m_{\text{maan}}}{m_{\text{aarde}} + m_{\text{maan}}}$; $m_{\text{aarde}} = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg , $m_{\text{maan}} = 7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg

a. Is die ongelijkheid waar?

b. Had Halley gelijk?

Mars – Phobos

De planeet Mars heeft twee manen: Phobos en Deimos, oftewel “vrees” en “verschrikking”
We kijken naar de dubbelplaneet Mars – Phobos.



Opgave 26

Mars draait langzamer om zijn eigen as dan Phobos om hem heen draait, maar wel in dezelfde richting. Dat betekent dat $\omega_{\text{mars}} < \omega_{\text{phobos}}$.

Hoe volgt hieruit dat de getijdekracht ervoor zorgt dat ω_{mars} toeneemt?

Er geldt: $L_{\text{tot}} = I_{\text{mars}} \cdot \omega_{\text{mars}} + \mu\, d^2\, \omega$.

Opgave 27

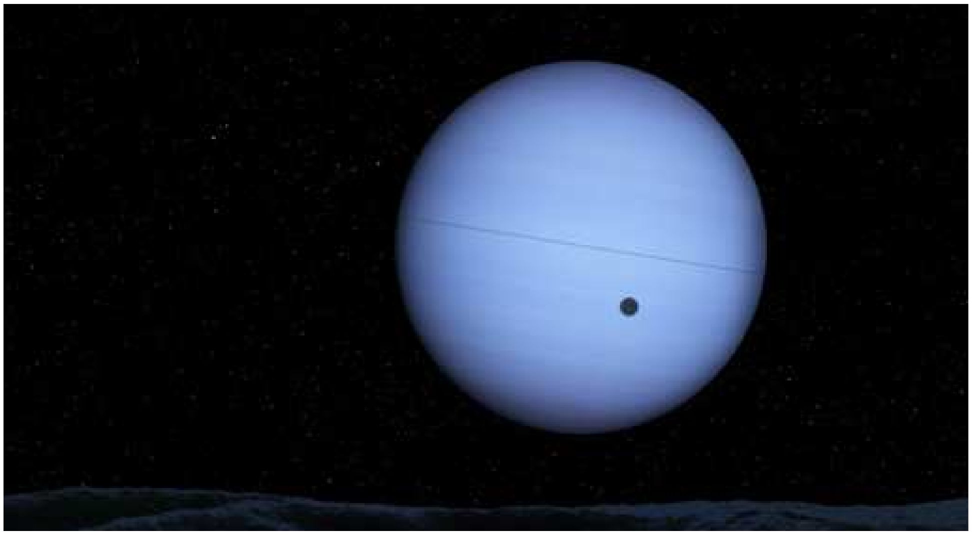
a. Wat stellen hierin de letters μ, d en ω voor?

b. Wat gebeurt er in de toekomst met d, wordt die groter of kleiner?

c. Wat gebeurt er, denk je, met Phobos in de verre toekomst?

Neptunus – Triton

Triton is met afstand de grootste van de dertien bekende manen van Neptunus.



Bijzonder aan de dubbelplaneet Neptunus – Triton is dat de draairichting van Triton om Neptunus tegengesteld is aan de draairichting van Neptunus om zijn as. Daarnaast heeft Triton een opvallend grote hoek (23°) met het evenaarsvlak van Neptunus, maar dat zullen we hier negeren. (Waarschijnlijk is Triton niet tegelijk met Neptunus ontstaan, maar later ingevangen in het zwaartekrachtveld van Neptunus.)

Er geldt weer $\vec{L}_{tot} = I_{neptunus} \cdot \vec{\omega}_{neptunus} + I_{triton} \cdot \vec{\omega}_{triton} + \mu\, d^2\, \vec{\omega}$

Opgave 28

a. Wat weet je van de richtingen van $\vec{\omega}_{neptunus}$ en $\vec{\omega}_{triton}$?
b. Leg uit dat de formule voor L_{tot} er in dit geval zo uitziet: $L_{tot} = I_{neptunus} \cdot \omega_{neptunus} - \mu\, d^2\, \omega$.
c. Hoe ziet de toekomst voor Triton eruit?