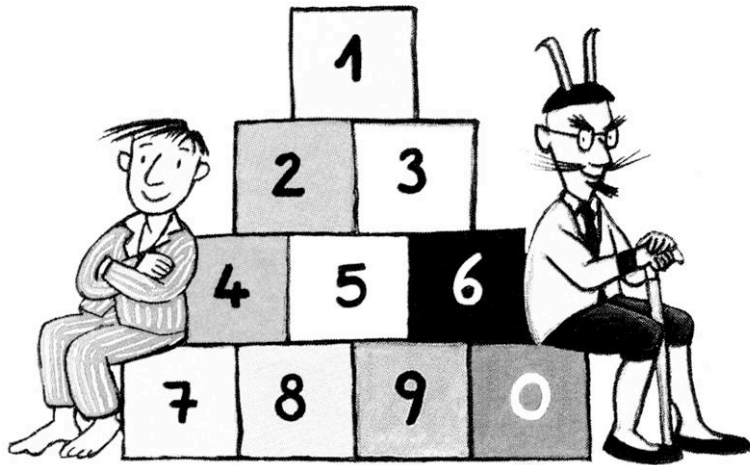


# De telduivel



**Een slaapverwekkende opdracht voor iedereen die  
van wiskunde durft te dromen**

*Een praktische opdracht voor leerlingen van  
5 VWO met wiskunde B*



## DE TELDUIVEL

### Inleiding

‘Wiskunde? Hou op zeg! Voor veel mensen is wiskunde een warboel van getallen, sommen en onbegrijpelijke berekeningen. Ook Robert, de jongen in de blauwe pyjama, moet er niks van hebben. Tot hij bezoek krijgt van een telduivel en twaalf nachten lang met getallen aan het goochelen is. Dan blijkt dat wiskunde een spannend en grappig spel is dat Robert – en ook de lezers – geen enkele moeite kost. Wiskunde is niet moeilijk. Zodra het telduiveltje met zijn toverstok zwaait, verdwijnt de angst voor getallen als sneeuw voor de zon.’

Tot zover de tekst op de achterkant van het boek

*De telduivel, een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is*

van Hans Magnus Enzensberger (De Bezige Bij, Amsterdam, 1999, ISBN 90 234 8149 6).

Deze praktische opdracht bestaat uit drie delen. In het eerste deel maak je kennis met wiskundige uitspraken, vermoedens en bewijzen. In het tweede deel ga je twee hoofdstukken van *De telduivel* lezen. Daar krijg je een aantal vragen over, die je in je groepje schriftelijk beantwoordt. In het derde deel schrijf je in hetzelfde groepje een nieuw hoofdstuk bij dit boek: ‘De dertiende nacht’.

### Deel A

Deze praktische opdracht gaat over getallen en met name over *gehele getallen*. Dat zijn allereerst de *natuurlijke getallen* 0, 1, 2, 3, 4... maar ook hun tegengestelde: -1, -2, -3, -4..., *de negatieve gehele getallen*. Deze getallen kun je optellen en vermenigvuldigen. Je weet al sinds de basisschool dat sommige getallen uiteenvallen in kleinere getallen. Bijvoorbeeld:  $6=1+1+1+1+1+1$  of  $6=2\cdot 3$ . Het uiteenvallen in meerdere getallen die worden opgeteld is uiteindelijk saai want je eindigt altijd met een rij énen. Het uiteenvallen ten opzichte van de vermenigvuldiging daarentegen is meteen spannend: sommige getallen vallen uiteen zoals:  $4 = 2\cdot 2$ ,  $6 = 2\cdot 3$ ,  $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ ,  $9 = 3\cdot 3$ , enz. en anderen doen dat niet: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Deze laatste getallen hebben een naam.

**Definitie** Een natuurlijk getal groter dan 1 dat niet het product is van twee kleinere natuurlijke getallen noemen wij een *priemgetal*.

Hoe vind je zulke priemgetallen? Hoe weet je of je met een priemgetal te maken hebt? Hoeveel priemgetallen zijn er? Op hoeveel manieren kunnen getallen uiteenvallen? Komt het vaker voor dat twee priemgetallen twee verschillen, zoals 11 en 13 of 17 en 19? Kun je elk even getal schrijven als som van twee priemgetallen? Dit zijn vragen waarop de antwoorden soms al ruim 2300 jaar bekend zijn maar waar ook deels nog vandaag de dag geen mens het antwoord op weet. Een groot deel van de wiskunde draait al duizenden jaren om het beantwoorden van zulke vragen over getallen. De vrucht van deze zoektocht van ontelbaar veel mensen noemen we *getaltheorie* – volgens de wiskundige Carl Friedrich Gauß (1777-1855) de koningin onder alle wiskundige theorieën. Tegenwoordig wordt getaltheorie veelvuldig toegepast. Dit is eigenlijk geen wonder want zodra je het met getallen te maken hebt, komen natuurlijk ook hun fundamentele eigenschappen kijken.

Boze tongen onder wiskundigen vertellen wel eens de mop dat voor een natuurkundige elk oneven getal een priemgetal is: 3 is er een, 5 is er een, 7 is er een, 9 is een meefout, 11 is er een, 13 is er een, 15 is een meefout, 17 is er een en 19 is er ook een. Dus blijkt uit negen metingen dat de bewering klopt tot op twee meefoutjes na. Dit lijkt er dus op dat er zeer verschillende manieren van verschillende kwaliteit bestaan om een bewering aan te tonen. Wij wiskundigen willen het eerst *zeker* weten voordat wij een bewering accepteren.

In dit eerste deel krijgen jullie een aantal beweringen voorgeschoteld waarvan jullie zelf moeten uitmaken of deze beweringen kloppen of niet. De conclusies dien je door goede en valide argumenten te onderbouwen. Jullie moeten zelf uitvinden, hoe. Je krijgt pas punten als je dat op een overtuigende

manier lukt. Voor berekeningen mag je uiteraard je grafische rekenmachine inzetten. Om een aantal van deze beweringen te kunnen formuleren voeren wij nog snel een notatie in.

Soms wil je het bij een natuurlijk getal over de cijfers hebben die erin voorkomen. Bijvoorbeeld 4711 heeft de cijfers  $c_3 = 4$ ,  $c_2 = 7$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_0 = 1$ . Het probleem echter is dat de weergave in letters dubbelzinnig kan zijn. Als je bijvoorbeeld schrijft:  $c_3c_2c_1c_0$  met cijfers  $c_i$  tussen 0 en 9 zou dat kunnen staan voor  $c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + c_3 \cdot 10^3$  maar ook voor  $c_3 \cdot c_2 \cdot c_1 \cdot c_0$ . Om hier geen misverstanden te laten ontstaan, gebruiken wij de volgende notatie.

**Notatie** Als wij in het tientallige stelsel de cijfers van een natuurlijk getal  $n$  door letters aan willen geven, dan schrijven wij:  $n = c_k|c_{k-1}|\dots|c_1|c_0$  met de  $k$  cijfers  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0$  vanaf 0 tot en met 9 waarbij het eerste cijfer niet nul is, dwz.  $c_k > 0$ , want anders zouden we het ook weg kunnen laten. Gegeven de cijfers  $c_k, \dots, c_0$ , dan vind je het getal terug via:  $n = c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + \dots + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_k \cdot 10^k$ . Bijvoorbeeld  $4711 = 4|7|1|1 = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$ .

### Gelogen of niet?

Probeer er nu achter te komen of de volgende beweringen waar zijn of niet.

1. Als een oneven natuurlijk getal geen priemgetal is dan is het wel door 3, 5, 7, 11 of 13 deelbaar.
2. Het getal 10013 is het kleinste natuurlijke getal dat op twee verschillende manieren te ontbinden is in priemgetallen:  $10013 = 589 \cdot 17$  en  $10013 = 527 \cdot 19$ .
3. Een natuurlijk getal  $n = c_k|c_{k-1}|\dots|c_1|c_0$  is deelbaar door 3 dan en slechts dan als  $c_k+c_{k-1}+\dots+c_4+c_3+c_2+c_1+c_0$  deelbaar is door 3.
4. Een natuurlijk getal  $n = c_k|c_{k-1}|\dots|c_1|c_0$  is deelbaar door 11 dan en slechts dan als  $c_0-c_1+c_2-c_3+c_4-c_5 \dots c_k$  deelbaar is door 11.
5. Een natuurlijk getal  $n = c_k|c_{k-1}|\dots|c_1|c_0$  is door 7, 11 of 13 deelbaar dan en slechts dan als  $c_k|c_{k-1}|\dots|c_4|c_3 - c_2|c_1|c_0$  deelbaar is door 7, 11 of 13. (Bereken  $7 \cdot 11 \cdot 13$ .)
6. De *kwadratische rij* (dwz. de verschilrij is een rekenkundige rij) waarvan de eerste termen worden gegeven door 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, ... bestaat uitsluitend uit priemgetallen.
7. Er bestaan slechts eindig veel priemgetallen. Het grootste priemgetal  $2^{20996011}-1$  is een voorbeeld van een *Mersenne-priemgetal* en werd op 2 december 2003 gevonden.
8. Voor alle natuurlijke getallen  $n > 0$  geldt:  $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0} = 2^{n-1}$ .
9. Voor elk natuurlijk getal  $n$  geldt:  $(1+2+3+4+\dots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3$ .
10. Elk van de getallen in de rij 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331, 333333331, 3333333331... is een priemgetal.
11. Het repeterende decimale getal 0,999999... is gelijk aan 1.
12. De som van de eerste  $k$  oneven natuurlijke getallen is het kwadraat van een natuurlijk getal.
13.  $\sqrt{10}$  is te schrijven als breuk, of anders gezegd, er bestaan twee gehele getallen  $m$  en  $n$  zodat geldt  $m^2 = 10n^2$ .

## Deel B 1

Lees de tekst van 'De derde nacht' door en beantwoord de volgende vragen.

1. Vergelijk de definitie van een priemgetal uit het boek met onze definitie boven. Leg uit.
2. In deze nacht worden drie wiskundige vermoedens verteld. Formuleer deze vermoedens zo nauwkeurig mogelijk.
3. Probeer na te gaan (bijvoorbeeld door wiskundigen te raadplegen of informatie te zoeken op internet) of deze vermoedens ondertussen bewezen stellingen zijn, of dat het nog onbewezen vermoedens zijn. Misschien zijn er wel tegenvoorbeelden gevonden, zodat bewezen is dat ze niet waar zijn.

## Deel B 2

Lees de tekst van 'De vijfde nacht' en beantwoord de volgende vragen.

4. In deze droom worden twee wiskundige formules aannemelijk gemaakt. Schrijf deze formules op.
5. Geef een wiskundig bewijs voor deze formules.

## Deel C

In het boek *De telduivel* is elke droom van Robert gemotiveerd door een wiskundige achtergrond. Achter bijna elk detail en elke keuze die de auteur heeft gemaakt verschuilt zich een wiskundig aspect. Schrijf nu zelf *de dertiende nacht*. Kies hiervoor een wiskundig onderwerp en schrijf het verhaal over enkele wiskundige aspecten ervan. Laat je gerust door het onderwerp uitdagen. Je hoeft er niet meteen alles van te begrijpen en je mag ook zijsporen van je onderwerp bewandelen. Licht in een *apart stuk* al je keuzes en ideeën uit je verhaal wiskundig toe. Ga niets verzinnen dat volledig los staat van je wiskundig onderwerp. Zorg dat je verhaal in dienst staat van de wiskunde die je uit wil leggen. Probeer jouw onderwerp in het verhaal op een eenvoudige, maar ook eerlijke manier recht te doen.

In de keuze van het onderwerp ben je in principe vrij, maar je kunt ook uit de onderstaande onderwerpen kiezen. Je mag **één** onderwerp kiezen uit 1 t/m 19 óf **drie** onderwerpen uit 20 t/m 26 (die zijn wat kleiner van omvang).

1. Pythagoreïsche drietallen.
2. Waarom is er bij de decimale schrijfwijze van breuken sprake van (op den duur) repententie?
3. Tovervierkanten.
4. Wat zouden 'vijfhoekse getallen', 'zeshoekse getallen' of 'n-hoekse getallen' kunnen zijn? Kun je formules voor zulke 'vijfhoekse getallen', 'zeshoekse getallen' of 'n-hoekse getallen' geven? Een oplossing zou kunnen zijn:  $_n(n+1)$ ,  $_n(2n-0)$ ,  $_n((3n-1))$ ,  $_n(4n-2)$ ,  $_n(5n-3)$  enz..
5. Op hoeveel nullen eindigt  $1000!$ ? (Antwoord 249) En op hoeveel nullen eindigt  $n!$ ?
6. Syracuse-rij: Als  $n$  even dan deel door 2, als  $n$  oneven dan  $3n+1$ . Voorbeeld: begin je met 11 dan krijg je:  $11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ . Eindigt dit altijd op 1?
7. Het Kaprekargetal. Voorbeeld  $981 - 189 = 792$ ;  $972 - 279 = 693$ ;  $963 - 369 = 594$ ;  $954 - 459 = 495$ . Dit noemen we het Kaprekargetal bij getallen van 3 cijfers. Bestaat er ook een Kaprekargetal van 4 cijfers? En van 5 cijfers?
8. Wat is het grootste getal dat je niet kunt schrijven in de vorm  $7n + 11m$ ? Hierbij zijn  $m$  en  $n$  natuurlijke getallen. Meer in het algemeen:  $an + bm$ ?
9. Repunits.  $R(1) = 1$ ,  $R(2) = 11$ ,  $R(3) = 111$ , dus  $R(n) = 11111\dots111$  ( $n$  enen). Zitten hier priemgetallen bij? Beschrijf de priemdelers van repunits. Kwadraten? Wanneer zijn  $R(n)$  en  $R(m)$  onderling ondeelbaar? Neem eens de kwadraten van  $R(4)$  en van  $R(10)$ .
10. Leid regels af hoe je uit de cijfers van een getal in het drietallig stelsel de deelbaarheid door bepaalde delers kunt zien.

11. GGD en KGV. Wat is het verband tussen GGD(a,b) en KGV(a,b)? En wat tussen GGD(a,b,c) en KGV(a,b,c)?
12. Hoe kun je snel zien dat een getal zeker geen kwadraat is?
13. Zoek priemdelers van repunits.
14. Kun je elk getal schrijven als een breuk?
15. De uniciteit van de ontbinding in priemfactoren.
16. De verdeling van damstenen.
17. Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen.
18. Staafjes op een ruitenrechthoek.
19. Stapelgetallen

Kleinere onderwerpen waarvan je er **drie** kan kiezen:

20. Het aantal delers van een getal. Bijvoorbeeld welk getal van 4 cijfers heeft de meeste delers? (Dit zijn er twee nl. 7560 en 9240. Beide hebben 64 delers.)
21. Hoe te zien dat een getal deelbaar is door 2, 3, 4, ....., 11, 12, 13?
22. Voorbeelden:  $47 \times 43 = 2021$  ( $4 \times 5 = 20$  en  $7 \times 3 = 21$ ) en  $38 \times 32 = 1216$  ( $3 \times 4 = 12$  en  $8 \times 2 = 16$ ). Hoe werkt dit?
23. Rekenspelletjes maken zoals:  
Iemand doet in stilte de volgende berekening:  
-neem rangnummer van je geboortemaand  
-vermenigvuldig dat getal met 2  
-tel hier 5 bij  
-vermenigvuldig het resultaat met 50  
-tel tenslotte je leeftijd erbij  
Laat het resultaat hardop noemen, trek er in gedachte 250 af en noem vervolgens zijn leeftijd  
Geef met haakjes verdrijven een algemeen bewijs van de werking van dit spelletje.
24. Ontdek een aantal manieren om snel een kwadraat te kunnen uitrekenen.
25. Leg de werking van de volgende *boerenvermenigvuldiging* uit:  
 $235 \times 72 = 470 \times 36 = 940 \times 18 = 1880 \times 9 = 3760 \times 4 = 7520 \times 2 = 15040 \times 1$   
dus  $1880 + 15040 = 16920$  is de uitkomst.
26. Er is maar een natuurlijk getal waarvan de wortel gelijk is aan de som van de cijfers. Welk getal is dat? Zijn er nog andere zulke eigenschappen te bedenken waarmee enkele getallen uit kunnen blinken?

Daarnaast bevelen wij als mogelijke bronnen aan:

- Het wiskundetijdschrift *Pythagoras* voor jongeren. Zoek ook op: <http://www.pythagoras.nu>.
- *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* <http://www.research.att.com/~njas/sequences>
- De website <http://www.ratio.ru.nl> voor inspirerende computerapplets over getalbegrip.

**AANVULLENDE TOELICHTING**

### ad 1. Pythagoreïsche drietallen

Drietallen, die aan de stelling van Pythagoras voldoen, noemen we pythagoreïsche drietallen.

Een voorbeeld: (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal omdat  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

We zoeken naar “echte” pythagoreïsche drietallen. Daarmee bedoelen wij drietallen, die onderling priem zijn, dus geen gemeenschappelijke delers hebben. Weer een voorbeeld: (6, 8, 10) is ook een pythagoreïsch drietal, maar deze kunnen we gemakkelijk vinden uit ons eerste voorbeeld (3, 4, 5) door elk getal met 2 te vermenigvuldigen en zo is (6, 8, 10) eigenlijk “hetzelfde” pythagoreïsch drietal als (3, 4, 5).

Twee recepten om pythagoreïsche drietallen te krijgen zijn de volgende:

(i) Neem een oneven getal bijvoorbeeld 3, kwadrateer dit getal en verdeel dit kwadraat “zo eerlijk mogelijk”.

Dus  $3^2 = 9$  en  $9 = 4 + 5$ . We vinden dus de getallen 4 en 5, en (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal.

Nemen we 7, dan verdelen we het kwadraat van 7 (=49) in 24 en 25 en (7, 24, 25) is een pythagoreïsch drietal.

Nemen we 9, dan verdelen we het kwadraat van 9 (=81) in 40 en 41 en (9, 40, 41) is een pythagoreïsch drietal.

(ii) Of neem een oneven kwadraat  $(2k + 1)^2$  dan is de som van alle oneven getallen die kleiner zijn dan

$(2k + 1)^2$  weer een kwadraat. Als je deze twee kwadraten optelt krijg je een derde kwadraat en zodoende een pythagoreïsch drietal. Kun je dit bewijzen?

Zo vinden we alle “echte” pythagoreïsche drietallen, of niet soms?

### ad 7. Het Kaprekarproces

We nemen een getal van 3 verschillende cijfers, bv. 819. We maken hiervan twee nieuwe getallen, waarbij bij de een de cijfers in stijgende (189) en bij de andere de cijfers in dalende (981) volgorde staan. Deze getallen trekken we van elkaar af, de kleinste van de grootste ( $981 - 189 = 792$ ). Dit proces herhalen we. In ons voorbeeld:

$972 - 279 = 693$ ;  $963 - 369 = 594$ ;  $954 - 459 = 495$ . Hier eindigt het proces en het getal 495 wordt het

Kaprekargetal van 3 cijfers genoemd. Probeer maar eens een ander getal van 3 cijfers.

De vraag nu is: hoe zit dit?

Trouwens: is er ook een Kaprekargetal van 4 of van 5 cijfers?

### ad 8. Muntstelsel

We willen een nieuw muntstelsel invoeren met een minimum aantal verschillende muntstukken. We denken hierbij aan twee muntstukken, met ieder een waarde van minstens 5.

Als voorbeeld nemen we muntstukken met een waarde van 5 en een waarde van 8.

Hiermee gaan we betalen. Bijvoorbeeld een bedrag van 47 betalen we met 3 munten van 5 en 4 munten van 8.

Maar nu is niet elk bedrag met deze twee muntsoorten te betalen, zeker kleine bedragen niet, neem maar eens bijvoorbeeld 19.

De vraag is: welke bedragen zijn wel uit te drukken in munten van 5 en 8 en welke niet?

Is er een grootste bedrag dat niet te betalen is met deze twee muntsoorten?

Hoe zit het met de twee muntsoorten a en b, waarbij a en b allebei minstens 5 zijn en a en b onderling priem?

### ad 9. Repunits

Repunits zijn getallen, die uit louter enen bestaan. De rij repunits  $R(n)$  ziet er als volgt uit:

$$R(1) = 1$$

$$R(2) = 11$$

$$R(3) = 111$$

$$R(4) = 1111$$

$$R(n) = 1111 \dots 1 \text{ in het totaal } n \text{ enen.}$$

Je kunt je dan van alles afvragen, bijvoorbeeld: zitten er in de rij repunits ook priemgetallen? Hoe zien die eruit?

Bekijk eens de kwadraten van bijvoorbeeld  $R(4)$  of  $R(10)$ . Wanneer zijn  $R(n)$  en  $R(m)$  onderling ondeelbaar?

### ad 15. Bewijs van de stelling over unieke factorontbinding

Aan de hand van de volgende opgave kun je zelf het bewijs vinden. Hierbij maak je veelvuldig gebruik van *delen met rest*. Daarmee bedoelen wij bijvoorbeeld: 100 is 7 maal 13 met rest 9. Door herhaaldelijke deling met rest (het zogenaamde *algoritme van Euclides*) kun je de grootste gemeenschappelijke deler (GGD) van twee gegeven getallen bepalen. Kijk op de Ratiosite (2. Passen, §2.3) <http://www.ratio.ru.nl/lesmateriaal/passen/index.html> voor meer uitleg, applets en illustraties hierover.

- Opgave:* In deze opgave ga je bewijzen dat elk natuurlijk getal op een *unieke* manier in priemgetallen uiteenvalt. Onderbouw de volgende drie uitspraken zo goed mogelijk met argumenten. Probeer eerst met getallen.
- Gegeven twee natuurlijke getallen  $s$  en  $t$ . De GGD van  $s$  en  $t$  noemen we  $d$ . Dan is  $d$  een deler van  $s$  en  $t$  die tegelijkertijd kan worden geschreven als  $d=m \cdot s+n \cdot t$  met gehele getallen  $m$  en  $n$ . (Hint: Stel  $s>t$ . Als je  $s$  deelt door  $t$  met rest  $r$ , dan is ook de rest  $r$  deelbaar door  $d$  maar kleiner dan zowel  $s$  als ook  $t$ . Als je vervolgens  $t$  deelt door  $r$  krijg je een nog kleinere rest die nog steeds een veelvoud is van  $d$ . Als je zo doorgaat eindig je automatisch een keer op rest  $d$ . Als je nu in je berekening terugloopt vind je gehele getallen  $m$  en  $n$  zodat  $d=m \cdot s+n \cdot t$ .)
  - Laat zien dat een priemgetal  $p$  dat een product  $a \cdot b$  deelt, al één van de twee getallen,  $a$  of  $b$ , deelt. Gebruik hiervoor (i) met  $s=p$  en  $t=a$ . De GGD van  $p$  en  $a$  is 1 of  $p$ .
  - Laat zien dat elk natuurlijk getal op een unieke wijze te ontbinden is in priemgetallen. Beschrijf hoe deze uniciteit is te verstaan.

#### ad 16. Verdelen van damstenen

Je neemt 10 damstenen en verdeelt deze in een willekeurig aantal stapeltjes; als voorbeeld nemen we 5 en 5. We nemen nu van elk stapeltje één steen af en vormen met deze stenen een nieuwe stapel. Dit procédé herhalen wij. In ons voorbeeld krijgen we:

Begin:	5	5			
Eerste stap:	4	4	2		
Tweede stap:	3	3	1	3	
Derde stap:	2	2		2	4

Zo gaan we door. Er blijkt op den duur een stabiele situatie te ontstaan.

Nu een aantal vragen.

- Stel we beginnen met een andere verdeling van deze 10 stenen – b.v. drie stapels van 1 steen, 2 stenen en 7 stenen- komen we dan ook op deze stabiele situatie uit? En geldt dit voor elke verdeling?
- Stel we beginnen met een ander aantal damstenen, b.v. 12. Krijgen we dan op den duur ook een stabiele situatie? Hangt dit ook af van de beginverdeling?
- Bij welke aantallen stenen krijgen we een stabiele situatie?
- Bewijs dat je bij de onder c gevonden aantallen een stabiele situatie krijgt.
- Kan het zijn dat je bij elk ander aantal geen stabiele situatie krijgt, maar in een “loop” terecht komt? Leg uit.

#### ad 17. Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen

Een *perfect getal* is een getal dat gelijk is aan de som van al zijn delers. Bijvoorbeeld  $6=1+2+3$  of  $28=1+2+4+7+14$  zijn beroemde perfecte getallen. Niemand weet tot heden of er ook oneven perfecte getallen zijn. Ook weet niemand hoeveel even perfecte getallen bestaan. *Mersenne priemgetallen* zijn priemgetallen van de vorm  $2^{n+1} - 1$  voor een natuurlijk getal  $n$ . Het zoeken naar nieuwe Mersenne priemgetallen is nog steeds in volle gang. Het lijkt bijna een wonder, ook al weten we van beide soorten getallen zeer weinig, kun je laten zien dat er net zoveel even Mersenne priemgetallen als perfecte getallen zijn. Dit doe je als volgt:

- Bewijs dat geldt: als  $p = 2^{n+1} - 1$  een Mersenne priemgetal is, dan is  $A = 2^n p$  een perfect getal.
- Als omgekeerd  $A = 2^n q$  een perfect getal is, dan moet  $q = 2^{n+1} - 1$  zijn en  $q$  is een priemgetal.

Schets: Omdat wij veronderstellen dat  $A$  een perfect getal is geldt (de som is over alle delers van  $q$ ):

$$(*) \quad A = q + 2q + 2^2 q + \dots + 2^{n-1} q + \sum_{d \mid q} (d + 2d + 2^2 d + \dots + 2^n d).$$

Hieruit kun je afleiden dat geldt:  $q = (2^{n+1} - 1)q'$  waarbij  $q' = \sum_{d|q} d$ . Als je nu, net als in (\*), de som van de delers van  $A = 2^n q = 2^n (2^{n+1} - 1)q'$  opschrijft – zo expliciet als dat vanuit deze ontbinding mogelijk is – dan vind je  $A = 2^n (2^{n+1} - 1)q' = (2^{n+1} - 1)q' + (2^n - 1)(2^{n+1} - 1)q' + (2^{n+1} - 1) \sum_{\substack{d|q \\ d \neq (2^{n+1} - 1)q'}} d$ . Hieruit volgt dat  $2^{n+1} - 1$  en  $q'$  de enige delers zijn van  $q$ , waaronder zich dus ook 1 moet bevinden.

#### ad 18. Staafjes op een ruitenrechthoek

*Stelling:* Gegeven een rechthoek met afmetingen  $m \times n$  waarbij  $m$  en  $n$  natuurlijke getallen zijn. Stel nou dat deze rechthoek kan worden overdekt met staafjes van de lengte  $1 \times k$  voor een natuurlijk getal  $k$ . Dan deelt  $k$  een van de getallen  $m$  of  $n$ .

- Probeer een rechthoek van 9 keer 10 te overdekken met staafjes van 1 keer 6.
- Kun je een bewijs van de stelling geven? Behulpzaam zou hierbij kunnen zijn dat je aan de vakjes in een rechthoek de getallen 1 tot en met  $k$  toekent. Let erop welke getallen door de staafjes worden afgedekt. Kun je de getallen zo toekennen dat er onder elk van de staafjes steeds alle getallen 1 tot en met  $k$  komen te liggen?

#### ad 19. Stapelgetallen

Een getal dat geschreven kan worden als de som van twee of meer positieve, gehele, elkaar opvolgende getallen, noemen we *stapelbaar*. Voorbeelden:  $140 = 14 + 15 + \dots + 21$ , dus 140 is stapelbaar;  $141 = 70 + 71$ , dus 141 is stapelbaar.

In bovenstaande voorbeelden noemen we 14 en 70 het begin van een *stapel*. Een stapel die begint met 1 noemen we een *basisstapel*. Voorbeeld:  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ . We zeggen in zo'n geval dat 10 een basisstapel heeft.

Een stapel die uit een even aantal getallen bestaat noemen we een *even stapel*.

Vragen:

- Zijn alle oneven getallen stapelbaar?
- Welke even getallen zijn niet stapelbaar?
- Laat zien dat voor de som  $S$  van een stapel die begint bij  $a$ , en bestaat uit  $n$  getallen geldt:  $S = \frac{n(n+2a-1)}{2}$ .
- Geef een beschrijving van de getallen die een basisstapel hebben.

Een positief geheel getal is altijd te schrijven op één manier als product van priemgetallen, bijvoorbeeld

$$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$$

- Hoeveel delers heeft het getal 5400?
- Welke getallen hebben slechts één stapel?
- Hoe kun je aan een getal zien dat het een even stapel heeft?
- Hoeveel stapels heeft het getal 2004?
- Kun je een getal vinden met precies 2004 stapels?

Zie ook: Dave Odegard, *Stapel*, Pythagoras, November 2004

#### ad 20. Vermenigvuldigen

Rekenen en dus ook vermenigvuldigen is tegenwoordig blijkbaar lastig.

Als we bijvoorbeeld moeten uitrekenen  $67 \times 63$  dan gaat dat als volgt:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{63 \times} \\ 201 \\ \underline{4020} \\ 4221 \end{array}$$

Dus  $67 \times 63 = 4221$ . Maar dit kan veel eenvoudiger. Kijk maar: Van de beide zessen hogen we er een op en vermenigvuldigen we ze met elkaar:  $6 \times 7 = 42$ . De 3 en de 7 vermenigvuldigen we met elkaar:  $3 \times 7 = 21$ .

Deze twee getallen zetten we achter elkaar en we krijgen het juiste antwoord: 4221.

Nog een voorbeeld:  $48 \times 42$ . We nemen  $4 \times 5 = 20$  en  $8 \times 2 = 16$  dus  $48 \times 42 = 2016$ .

Waarom hebben ze ons dit nooit eerder verteld? Zijn er meer van deze “trucjes”?

# Beoordeling praktische opdracht **De telduivel**

Groepsleden: 1. ....  
 2. ....  
 3. ....

Onderdeel	Max	Score	Opmerkingen
A1	3		
A2	3		
A3	3		
A4	3		
A5	3		
A6	3		
A7	3		
A8	3		
A9	3		
A10	3		
A11	3		
A12	3		
A13	3		
Uitwerking	5		<i>Eén of meerdere A-onderdelen zijn op een verrassende en wiskundig correcte wijze aangepakt en opgelost</i>
B1	2		<i>Definitie priemgetal</i>
B2	5		<i>Formulering 3 vermoedens derde nacht</i>
B3	5		<i>Informatie 3 vermoedens derde nacht</i>
B4	4		<i>2 formules vijfde nacht</i>
B5	5		<i>Bewijs 2 formules vijfde nacht</i>
C Vrije deel	25		<i>Creatief, authentiek, volledig, wiskundig correct</i>
Cosmetica	5		<i>Uiterlijk, lay-out, overzichtelijk</i>
Tijd	5		<i>Tijdig ingeleverd (planning)</i>
<b>Totaal</b>			<b>Cijfer = Totaal / 10 =</b> 